Das Verfahren der korrelierten Hilfsvariablen

Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
der Rechts- und
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
(doctor rerum politicarum)

Bernd Hort

1974

Das Verfahren der korrelierten Hilfsvariablen

Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
der Rechts- und
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
(doctor rerum politicarum)

Bernd Hort

Tag der Disputation: 12. Juli 1974

Dekan: Prof. Dr. jur. Günter Jahr

Erstberichterstatter: Prof. Dr. phil. nat. Hans Schneeweiß

Zweitberichterstatter: Prof. Dr. rer. pol. Werner Neubauer

Das Verfahren der korrelierten Hilfsvariablen

Gliederung:

		Seite
Einleitung		2
1.	Die Monte-Carlo-Simulation	3
1.1	Begriff und Bedeutung	3
1.2	Bemerkungen zur Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation	5
1.2.1	Das Prinzip einer Monte-Carlo-Simulation	5
1.2.2	Das Problem des Zufallsmechanismus	8
1.2.3	Die Realisation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen	1o
2.	Varianzreduzierende Methoden als Monte-Carlo-Techniken	24
2.1	Allgemeine Einführung	24
2.1.1	Begriff und Bedeutung	24
2.1.2	Messung der Effizienz	26
2.1.3	Überblick über varianzreduzierende Methoden	27
2.2	Die Methode der korrelierten Hilfsvariablen	27
3.	Die Simulation von Wartesystemen	39
3.1	Allgemeine Beschreibung von Wartesystemen	39
3.2	Die verwendeten Wartesysteme	41
3.2.1	Das System M/M/1	41
3.2.2	Das System M/M/2	42
3.2.3	Das System $M/E_k/1$	48
3.2.4	Das System $M/H_2/1$	49
3.2.5	Das System M/G/1	51
3.3	Die rechnerische Durchführung der Simulation	51
3.3.1	Die Simulationsmethode	51
3.3.2	Das Problem des Erreichens der stationären Phase	62
3.3.3	Schätzung der mittleren Warteschlangenlänge	79
4.	Modell- und Programmbeschreibungen	8o
4.1	Modellbeschreibungen	8o
4.2	Programmbeschreibungen	82
5.	Ergebnisse der Simulation und Auswertung	86
Literaturverzeichnis		122

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547310_0060

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit soll die Effizienz des Verfahrens der korrelierten Hilfsvariablen überprüft werden. Dieses Verfahren ist eine spezielle Technik bei Monte-Carlo-Simulationen, mit der man die Genauigkeit einer Schätzung wesentlich heraufsetzen kann. Man kann eine Monte-Carlo-Simulation etwas prosaisch definieren als eine "Methode der Ratlosigkeit und der Hoffnung": Immer dann, wenn ein Wissenschaftler auf analytischem Wege nicht mehr weiter kommt, ratlos wird, kann er hoffen, mittels einer Monte-Carlo-Simulation doch noch zu einigen Ergebnissen zu gelangen. Der hohe Standard der Computer, vor allem die in den letzten Jahren stark gestiegene Rechengeschwindigkeit, machen die Entscheidung leicht. Die Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation erfordert jedoch sehr viel Einblick in das zu simulierende, nachzuahmende System. Dieses Wissen kann man oftmals dazu verwenden, die gewonnenen Schätzungen, meist Mittelwert- und Varianzschätzungen, mittels spezieller Methoden zu verbessern. Das Verfahren der korrelierten Hilfsvariablen ist eine solche Methode, die das Phänomen der Korrelation ausnutzt, um die Varianz bzw. die Standardabweichung einer Schätzung zu verkleinern. Daher spricht man von einem varianzreduzierenden Verfahren. Zur Untersuchung der Effizienz des Verfahrens der korrelierten Hilfsvariablen werden Wartesysteme simuliert und deren mittlere Warteschlangenlänge geschätzt. Ehrenfeld und Ben Tuvia (1962) haben eine ähnliche Untersuchung mit solchen Verfahren an Wartesystemen vorgenommen und die mittlere Wartezeit geschätzt.

1. Die Monte-Carlo-Simulation

1.1 Begriff und Bedeutung [1)]

Die Simulation nimmt in den letzten Jahren in fast allen experimentellen Wissenschaften einen immer breiter werdenden Raum ein. Studiert man z.B. Veröffentlichungen der Statistik, Ökonometrie oder der Unternehmensforschung, so fällt bei vielen Autoren auffällig häufig das Stichwort Simulation. Immer dann, wenn die Verfasser auf analytischem Wege ihr Problem nicht mehr lösen können - sei es, weil die analytische Lösung scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet oder sei es, weil bisher noch kein geeignetes analytisches Verfahren zur Behandlung ihres Problems existiert - schlagen sie eine Simulation vor, um möglichst doch noch zu einigen Ergebnissen zu gelangen.

Schneeweiß [2)] gibt folgende Definition: "Simulation ist das Nachbilden eines realen Prozesses mit künstlichen Mitteln." Das Wesen der Simulation besteht also in der Nachahmung, und zwar in einer möglichst naturgetreuen Nachahmung der Wirklichkeit durch ein geeignetes Modell. An diesem Modell werden nun Experimente durchgeführt, deren Ergebnisse Rückschlüsse auf das Verhalten der Realität erlauben. Nachahmen läßt sich nur etwas, was man bereits kennt. Daher liefert die Simulation grundsätzlich keine neuen Erkenntnisse, die man nicht auch auf analytischem Wege hätte erschließen können. Simulation ist somit kein analytisches Lösungsverfahren wie z.B. der Simplexalgorithmus in der Unternehmensforschung, sondern im Sinne obiger Definition lediglich eine Vorgehensweise, die einmal in der Nachbildung eines realen Systems besteht und zum anderen im Experimentieren am Modell. Die Experimente am Modell könnte man als Bestandteil eines Lösungsverfahrens auffassen.

---

1) In der DGOR-Schrift Nr. 5 von Köcher, Matt, Oertel und Schneeweiß (1972) geht Schneeweiß in Kapitel I ausführlich auf das Wesen und die Bedeutung der Simulation ein. Vgl. hierzu auch Koxholt (1967) Kapitel 2.

2) Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), S. 1.

In der vorliegenden Untersuchung befassen wir uns mit Simulationen, bei denen die Wirklichkeit durch ein mathematisches Modell abgebildet wird. Ein solches Modell ist dann ein Gleichungssystem. Die Parameter dieses Gleichungssystems entsprechen den Komponenten des realen Systems, und die Verknüpfungen der Parameter entsprechen den Beziehungen zwischen diesen Komponenten. Die Simulation eines realen Systems durch ein mathematisches Modell erfordert natürlich ein hohes Maß an Abstraktion, was die Aussagefähigkeit für das reale System erheblich schmälern kann. Darüber sind von Fall zu Fall Betrachtungen anzustellen.

Steht man nun vor der Aufgabe, einen Zufallsprozeß nachzubilden, so muß das Modell dieses Prozesses ebenfalls Zufallscharakter haben, d.h. mindestens eine der Modellvariablen muß eine Zufallsvariable sein. Die Simulation eines Zufallsprozesses wollen wir Monte-Carlo-Simulation nennen. Der Begriff "Monte-Carlo" geht auf von Neumann und Ulam zurück[1], die sich in den vierziger Jahren damit befaßten, deterministische Probleme der Kernphysik durch stochastische Experimente zu lösen. In der Folgezeit sprach man allgemein von Monte-Carlo-Methoden und verstand darunter solche Verfahrensweisen, die es erlaubten, mittels stochastischer Experimente Näherungslösungen für bestimmte Probleme anzugeben. In diesem Sinne ist die Simulation eines Zufallsprozesses genau so als Monte-Carlo-Methode anzusehen wie das Schätzen der Zahl π durch ein Nadelwurfexperiment (Buffon'sches Nadelproblem[2]) oder die Näherungsberechnung eines bestimmten Integrals durch Zufallszahlen[3]. In diesem Sinne ist also eine Monte-Carlo-Simulation eine spezielle Monte-Carlo-Methode[4]. In der neueren Zeit hat sich jedoch eine Begriffswandlung vollzogen.

---

1) Vgl. Meyer (1956), S. 2ff.

2) Vgl. Gridgeman (196o).

3) Vgl. Köcher u.a. (1972), S. 61 f.

4) Vgl. Koxholt (1967), S. 33 f.

Man findet immer weniger Autoren, die zwischen Monte-Carlo-Simulation und Monte-Carlo-Methode unterscheiden[1]. Es ist eine Frage des Standpunktes, ob man die künstliche Erzeugung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen zur Lösung eines deterministischen Problems als Simulation ansieht. Wir wollen uns Schneeweiß[2] anschließen und keinen Unterschied zwischen Monte-Carlo-Methoden und Monte-Carlo-Simulation machen.

1.2 Bemerkungen zur Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation

1.2.1 Das Prinzip der Monte-Carlo-Simulation

Bei einer Monte-Carlo-Simulation ist immer die unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X zu simulieren. Dabei kann es sich um eine einzige Zufallsvariable X (statisches Modell) oder um eine Familie von Zufallsvariablen X_t (dynamisches Modell) handeln, wobei t meistens der Zeitparameter ist. Im letzteren Fall handelt es sich um die Simulation eines stochastischen Prozesses[3]. Um das Prinzip einer Monte-Carlo-Simulation zu erläutern, wollen wir uns auf die Betrachtung einer einzigen Zufallsvariablen X beschränken. Eine Simulation vollzieht sich in drei Schritten:

a) Planung und Programmierung des Simulationsablaufes
b) Durchführung der Experimente an dem Modell
c) Auswertung der Ergebnisse.

---

1) Mihram (1972) schlägt folgende Dreiteilung vor. Er will unterscheiden zwischen Stichprobenexperimenten, der Monte-Carlo-Methode und dem stochastischen Simulationsverfahren. Auf Seite 2o8 stellt er jedoch fest: "The suggested distinctions that could possibly be made among the terms: sampling experiments, the Monte-Carlo method, and stochastic simulation modeling, will not likely be universally adopted. The famous hill in Monaco seems to have been accepted, for better or for worse, as an adjective to describe all three of these related activities".

2) Vgl. Köcher u.a. (1972), S. 61 ff.

3) Zur Definition eines stochastischen Prozesses siehe etwa bei Ferschl (1964), S. 28.

Dazu einige Erläuterungen:

ad a): Voraussetzung zur Planung eines Simulationsexperiments ist das Vorhandensein eines geeigneten mathematischen Modells[1]. Gelingt es nun nicht, auf mathematisch analytischem Wege die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zu berechnen, so wird man sich für eine Simulation entscheiden. Hierzu ist es notwendig, ein geeignetes Computerprogramm zu erstellen[2]. Aus Zeitgründen empfiehlt es sich zu überlegen, ob man das gesamte Modell simuliert oder ob man mit Teilen davon auskommt. Selbst wenn man mit Teilen des Modells auskommt, ist es manchmal vorteilhaft, dennoch das ganze Modell zu simulieren. Man gewinnt dadurch zusätzliche Einblicke in das Modell, die einerseits dazu führen können, eventuelle Fehler im Modellbau zu entdecken, die jedoch andererseits, und das ist das Wichtigere, dazu verwendet werden können, die Genauigkeit der Schätzungen wesentlich zu erhöhen. Vorliegende Arbeit befaßt sich mit solchen Methoden. Das Mehr an Programmierarbeit kann durch den erzielten Genauigkeitsgewinn meist wettgemacht werden, sofern man überhaupt Wert auf große Genauigkeit legt.

Die unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung von X muß nun über das Modell aus bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellimmanenter Zufallsvariablen und aus nichtzufälligen Parametern, die außerdem noch im Modell vorhanden sein können, erschlossen werden[3]. Das geht folgendermaßen vonstatten: Das Programm ordnet jedem Eingangsparameter einen

---

1) Zum Modellbau vgl. etwa Köcher u.a. (1972), S. 57 oder auch Koxholt (1967), S. 19.

2) Die Beliebtheit der Simulationsmethode ist nicht zuletzt auf den hohen Standard der EDV-Anlage zurückzuführen. Während vor zehn Jahren eine Simulation einen Computer möglicherweise einen ganzen Tag beschäftigte, so schafft ein Computer der neuesten Generation dasselbe Simulationsprogramm in weniger als einer halben Minute. Das Simulieren mittels eines Computers nennt man auch digitale Simulation. Vgl. hierzu Bauknecht u. Nef (1971).

3) Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), S. 17 ff.

bestimmten Wert zu. Diese werden nun über die Modellvorschriften verarbeitet und ergeben einen bestimmten Wert für die Variable χ. Damit dieser Wert eine Realisation der Zufallsvariablen χ darstellt, muß das Programm denjenigen Eingangsparametern, die Zufallsvariablen sind, ebenfalls zufällig einen Wert zuordnen, gemäß den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Programmtechnisch sind also zwei Probleme zu lösen: Mittels eines Zufallsmechanismus sind unabhängige Realisationen einer Zufallsvariablen zu erzeugen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung einer vorgegebenen Verteilung entspricht. Problem 1 besteht in der Aufstellung eines geeigneten Zufallsmechanismus, Problem 2 in der Realisation einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Auf beide Probleme wird in den nächsten beiden Abschnitten 1.2.2 und 1.2.3 eingegangen.

ad b): Ein einziger Simulationslauf, wie soeben beschrieben, liefert nur eine einzige Realisation der Zufallsvariablen χ. Es ist klar, daß man dieses Experiment oftmals wiederholen muß, um die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung von χ zu erhalten. Genau genommen erhält man natürlich nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, sondern eine Häufigkeitsverteilung, die bei genügend großer Anzahl der Simulation der wahren Verteilung von X sehr ähnlich sein wird. Die Frage nach der erforderlichen Anzahl der Simulationen ist mit statistischen Methoden zu beantworten[1)]. Bei diesen Wiederholungen wird man den nichtstochastischen Eingangsparametern immer den gleichen Wert zuordnen. Hat man eine Näherungslösung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gewonnen für bestimmte Werte der nichtstochastischen Parameter, so wird man eventuell dazu übergehen, das Experimentieren mit diesen nichtstochastischen Parametern fortzusetzen, indem man mit anderen Wertekombinationen simuliert. Ob man das tut, hängt davon ab, was man bei der jeweiligen Simulation herausbekommen möchte.

---

1) Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), S. 135 ff., insbesondere S. 143 f.

ad c): Zur Auswertung der Ergebnisse einer Monte-Carlo-Simulation steht das gesamte statistische Methodenarsenal zur Verfügung. Insbesondere wird man Mittelwert und Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X mittels der erhaltenen Häufigkeitsverteilung schätzen und geeignete Konfidenzintervalle dafür angeben wollen. Denn die Simulation wird ja gerade zu Zwecken des Rückschlusses auf das reale System durchgeführt. Dazu muß natürlich etwas über die Güte der Schätzung gesagt werden[1].

1.2.2 Das Problem des Zufallsmechanismus

Es stellt sich die Frage, wie man mit einem Computer, also auf rechnerischem Wege, eine Folge von unabhängigen, zufälligen Ereignissen realisieren kann. Diese Aufgabe löst man mit Zufallszahlengeneratoren, oder auch kurz Zufallsgeneratoren genannt. Ein solcher Generator erzeugt zufällige Zahlen, die sogenannten Zufallszahlen. Das sind Zahlen, die rein zufällig, also völlig ohne Ordnung aufeinanderfolgen und in dem Intervall von 0 bis 1 gleichverteilt sind. Die Eigenschaft der Gleichverteilung bedeutet, daß im Mittel jede Zahl einer Zufallszahlszahlenfolge gleich häufig vorkommen soll. Während man früher oft mechanische Generatoren[2] technischer oder physikalischer Natur verwandte, so haben sich wegen der immer größer werdenden Bedeutung der Digitalrechner mathematische Generatoren durchgesetzt. Das sind Algorithmen, die Zufallszahlen nach einer iterativen Rechenmethode erzeugen. Da der Zufallsgenerator das Herzstück jeder Monte-Carlo-Simulation ist, wird diesem Thema naturgemäß in der Literatur[3] sehr viel Platz eingeräumt. Man hat eine Reihe von Algorithmen untersucht, hauptsächlich multiplikative und additive Kongruenzen sowie Kombinationen aus beiden, aber auch

---

1) Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), Kapitel IV (Schneeweiß): Statistische Auswertung und Sicherung der Ergebnisse einer Monte-Carlo-Studie.

2) Vgl. Tocher (1963), Kapitel V.

3) Vgl. etwa das Lehrbuch über Zufallszahlen von Jöhnk (1969), bzw. die Lehrbücher über Simulation von Tocher (1963), Kapitel 4,5 und 6, Hammersley und Handscomb (1964), Kapitel 3, Naylor u.a. (1966), Kapitel 3, Mize u. Cox(1968), Kapitel 5, Kohlas (1972), Kapitel 2 und Köcher u.a. (1972), Kapitel 3.

Quadrieren mit Abschneiden und dergleichen. Die so erzeugten Zahlen sind keine reinen Zufallszahlen mehr. Sie folgen sicherlich nicht mehr rein zufällig aufeinander, sind nicht unabhängig voneinander und auch bestimmt nicht gleichverteilt, sondern erfüllen diese Bedingungen nur noch näherungsweise. Hinzu kommt noch, daß jede auf einem Rechner mit einem Algorithmus hergestellte Zahlenfolge periodisch ist. Aus diesen Gründen nennt man die so erzeugten Zahlen, da sie nur annähernd die Eigenschaften echter Zufallszahlen besitzen, Pseudozufallszahlen. Die Annäherung an die Eigenschaften echter Zufallszahlen sollte jedoch möglichst gut sein. Um die Güte der Annäherung zu überprüfen, wurde eine Vielzahl statistischer Tests entwickelt. Jeder bei einer Monte-Carlo-Simulation verwendete Zufallsgenerator sollte gut durchgetestet sein[1)], denn die Qualität der Simulationsergebnisse hängt wesentlich von der Qualität des Zufallsgenerators ab.

Die meisten EDV-Anlagen, die für den Forschungsbereich ausgelegt sind, besitzen in ihrer Programmbibliothek einen Zufallsgenerator, der auf besonderen Aufruf eine Pseudozufallszahl liefert. Diese Generatoren sind meist nach der multiplikativen Kongruenzmethode[2)], die sich wegen ihrer Einfachheit besonderer Beliebtheit erfreut, gebaut.
Außerdem ist bei ihr die Bestimmung der Periodenlänge mit Hilfe der Zahlentheorie[3)] besonders einfach. Der Anwender eines implementierten Zufallsgenerators sollte sich auf jeden Fall davon überzeugen, daß der Generator gut durchtestet ist und eine ausreichende Periodenlänge besitzt.

---

1) Dazu ist zu bemerken, daß bei der Konstruktion eines Zufallsgenerators nicht schon a priori etwa durch zahlentheoretische Überlegungen die gewünschte Qualität eingebaut werden kann. Lediglich die Periodenlänge läßt sich vorher festlegen. Erst wenn die von dem Generator erzeugten Pseudozufallszahlen verschiedene Tests durchlaufen haben, kann man etwas über die Qualität des Generators aussagen. Somit ist die Konstruktion eines geeigneten Zufallsgenerators eine keineswegs zu unterschätzende Angelegenheit.

2) Vgl. etwa Köcher u.a. (1972), S. 1oo.

3) Vgl. hierzu den Anhang zum 3. Kapitel bei Naylor u.a. (1966), S. 63 ff.

Ein wesentlicher Vorteil der Pseudozufallszahlen ist ihre Reproduzierbarkeit. Man kann immer die gleiche Folge von Zufallszahlen erzeugen, wenn man denselben Startwert wählt. Das ist besonders für Vergleichsrechnungen wichtig. Außerdem kann man die Berechnung einer Folge von Zufallszahlen an einer bestimmten Stelle abbrechen und nach einer gewissen Zeit an genau der gleichen Stelle fortsetzen, indem man die zuletzt berechnete Zufallszahl der alten Folge als Startwert für die neue Folge wählt. Echte Zufallszahlen lassen sich ohne besondere Manipulationen nicht reproduzieren. Ein zweiter Vorteil der Pseudozufallszahlen liegt natürlich in ihrer schnellen Berechnung. Ein moderner Großcomputer kann mehrere Tausend solcher Zufallszahlen in weniger als einer Sekunde nach der multiplikativen Kongruenzmethode errechnen.

Die durch Zufallsgeneratoren erzeugten Zufallszahlen sind im Einheitsintervall gleichverteilt. Im nächsten Abschnitt wird nun erörtert, wie man aus diesen gleichverteilten Zahlen andere Zufallszahlen gewinnen kann, die einem beliebig vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetz folgen.

1.2.3 Realisation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Zufallszahlen[1)], die ein Zufallsgenerator errechnet, sind über dem Einheitsintervall gleichförmig verteilt. Bei Monte-Carlo-Simulationen müssen diese gleichverteilten Zufallszahlen so transformiert werden, daß sie einem gewissen vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetz folgen. Dazu wurden einige allgemeine Verfahren entwickelt. Die Transformationsmethode[2)], für die Kohlas (1972)[3)] die meines Erachtens zutreffende Bezeichnung Inversionsmethode gewählt hat, stellt die gewünschte Verteilung über die Umkehrung der Verteilungsfunktion dar. Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen, deren Verteilungsfunktion eine stetige streng monoton wachsende Funktion ist, existiert immer die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion.

---

1) Wenn im folgenden von Zufallszahlen die Rede ist, sind immer Pseudozufallszahlen gemeint.

2) Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), S. 117 ff.

3) Kohlas (1972), S. 53 ff.

Die Inversionsmethode funktioniert auch, wenn eine Umkehrfunktion nicht explizit existiert, wenn z.B. die Verteilungsfunktion stückweise konstant ist. So ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen immer stückweise konstant, denn sie hat bekanntlich das Aussehen einer Treppenfunktion. Wie die Inversionsmethode funktioniert, geht aus folgenden Abbildungen hervor, die für den diskreten Fall (Abb. 1) und den stetigen Fall (Abb. 2) gezeichnet wurden.

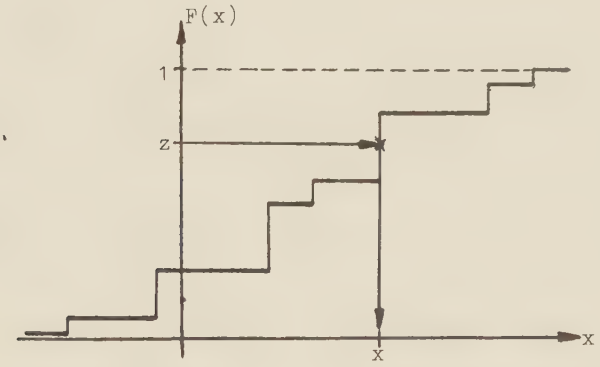


Abb. 1

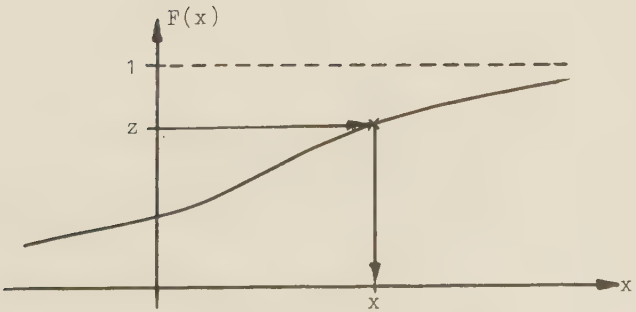


Abb. 2

Durch Sprünge in der Verteilungsfunktion treten bei der Inversionsmethode Mehrdeutigkeiten auf, wie man aus der Graphik der Treppenfunktion (Abb. 1) erkennt, nämlich genau dann, wenn der z-Wert des Zufallsgenerators mit einer "Treppenstufe" zusammenfällt. Das ist jedoch von geringer Bedeutung, denn bekanntlich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gleichförmig verteilte Zufallsvariable Z genau einen Punkt von F(x) annimmt, gleich Null. Bei der Programmerstellung wird man solche Mehrdeutigkeiten durch willkürliche Zuordnung ausschließen. Im diskreten Fall besteht die Inversionsmethode aus einem Suchalgorithmus, der die zu z gehörige Sprungstelle aufsucht (Abb.1), im kontinuierlichen Fall aus der Berechnung der Umkehrfunktion der entsprechenden Verteilungsfunktion, die jedem z einen bestimmten x-Wert zuordnet. Läßt sich die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen nicht ohne weiteres bestimmen, so kann man durch Diskretisierung dieser Verteilungsfunktion die Inversionsmethode dennoch anwenden.

Die Inversionsmethode ordnet jedem z_i gemäß der Formel $z=F(x)$ ein bestimmtes x_i zu. Man kann leicht zeigen, daß dann die Zufallsvariable $x=F^{-1}(z)$[1)] nach F(x) verteilt ist: Es sei x_o eine beliebig vorgegebene Zahl. Dann ist:

$$P\{x \leq x_o\} = P\{F^{-1}(z) \leq x_o\} = P\{z \leq F(x_o)\} = F(x_o)$$

Die Inversionsmethode arbeitet mit der Verteilungsfunktion. Die ist aber bei stetigen Zufallsvariablen oft unbekannt. Bekannt ist lediglich die Dichtefunktion. Zur Realisation solcher Zufallsvariablen eignen sich die Zurückweisungs- oder Verwerfungsmethode so wie die Kompositionsmethode[2)].

Zu den bisher geschilderten allgemeinen Verfahren kommen noch Spezialmethoden hinzu, die bestimmte Eigenschaften bekannter theoretischer Verteilungen ausnutzen, um vielleicht auf schnellerem Wege Zufallszahlen dieses Verteilungstyps zu erstellen[2)].

---

1) Unter der Voraussetzung, daß $F^{-1}(z)$ existiert.

2) Zurückweisungsmethode, Kompositionsmethode und andere Spezialverfahren werden von Schneeweiß in Köcher u.a.(1972), S. 123 ff. ausführlich beschrieben.

Bei den in dieser Arbeit vorgenommenen Monte-Carlo-Simulationen müssen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen realisiert werden: eine empirisch gewonnene Wahrscheinlichkeitsverteilung, die in Form einer Häufigkeitsverteilung vorliegt, die geometrische Verteilung, die Exponentialverteilung, die Erlang-Verteilung und die Hyperexponentielle Verteilung. Im folgenden wird nun geschildert, wie die entsprechenden Zufallszahlen erzeugt werden.

a) Empirisch gewonnene Wahrscheinlichkeitsverteilung

Man stelle sich einen Kundenschalter vor[1]. Jeder Kunde, der zur Bedienung zugelassen wird, beansprucht eine gewisse Bedienungszeit. Die Bedienungszeit ist eine Zufallsvariable T, die von Kunde zu Kunde rein zufällig unterschiedliche Werte annimmt. Der Kundenschalter ist Bestandteil eines komplexen Systems, das zu simulieren ist. Aus diesem Grunde benötigt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung von T. Um Aufschluß über die Verteilung von T zu bekommen, wurden in einer Woche sämtliche Bedienungszeiten gemessen. Danach teilte man die Zeiten in Klassen ein und erstellte folgende Tabelle:

1	2	3	4	5	6
i	Klasse	f_i	p_i	$\sum_{j=1}^{i} p_j$	$1-\sum_{j=1}^{i} P_j$
1	0 -0,5	500	0,228	0,228	0,772
2	0,5-1,0	800	0,365	0,593	0,407
3	1,0-1,5	500	0,228	0,821	0,179
4	1,5-2,0	200	0,091	0,912	0,088
5	2,0-2,5	100	0,046	0,958	0,042
6	2,5-3,0	60	0,027	0,985	0,015
7	3,0-3,5	20	0,010	0,995	0,005
8	3,5-4,0	10	0,005	1,000	0

1) Es handelt sich hier um ein hypothetisches Beispiel.

Man kann die gewonnen Häufigkeitsverteilung (Spalte 2 und 4) als Schätzung für die unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen T ansehen. Bei der Simulation von T gibt es nun mehrere Möglichkeiten. Man könnte z.B. die Verteilung durch eine theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung approximieren und eventuell mittels des Chi-Quadrat-Testes prüfen, ob diese Ersetzung gerechtfertigt ist. Wir wollen hier jedoch nicht so vorgehen, sondern die Verteilung von T über die Werte in Spalte 6 der Tabelle realisieren. Aus Gründen, die wir unter c) erörtern werden, wollen wir nicht mit der Verteilungsfunktion F(t), sondern mit der komplementären Verteilungsfunktion $\overline{F(t)} = 1-F(t)$ arbeiten. Für die Realisation der Zufallsvariablen T ist das nicht von Bedeutung. Die über $\overline{F(t)}$ realisierten Zufallszahlen gehorchen demselben Verteilungsgesetz wie die über F(t) realisierten. Der Obergang von F(t) zu $\overline{F(t)}$ bedeutet ja nichts anderes, als daß ich anstelle von z die neue Zufallszahl 1-z benutze. Da aber die Zufallszahlen 1-z ebenfalls über dem Einheitsintervall gleichförmig verteilt sind, folgen die auf diese Art realisierten Zufallszahlen ebenfalls dem Verteilungsgesetz von T.

Wir wollen nun eine Näherungskurve für die unbekannte Funktion $\overline{F(t)}$ konstruieren. Dazu fassen wir die Zahlen in Spalte 6 als Werte der unbekannten Funktion $\overline{F(t)}$ auf:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3	3,5	4
$\overline{F(t_i)}$	1	0,772	0,407	0,179	0,088	0,042	0,015	0,005	0

Dabei stellt t_i die rechte Grenze des i-ten Intervalles dar. Zeichnet man durch die Stellen $(t_i, \overline{F(t_i)})$ einen Polygonzug (Abb.3), so kann man diesen Polygonzug als Näherungsfunktion $\overline{F^*(t)}$ für die unbekannte Funktion $\overline{F(t)}$ ansehen.

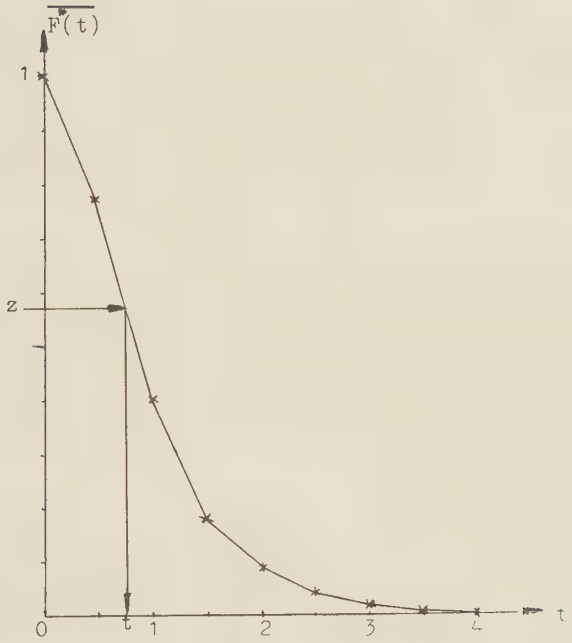
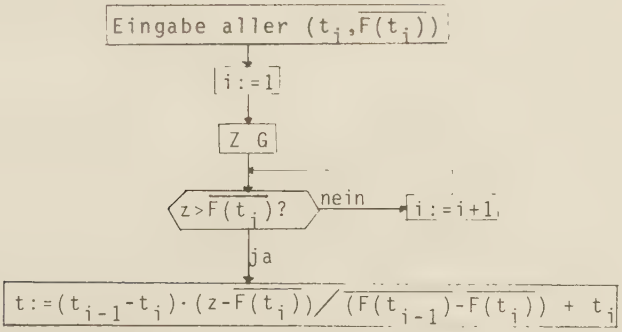


Abb. 3

Wie man rechnerisch nach der Inversionsmethode eine Realisation der Zufallsvariablen T findet, beschreibt das folgende Flußdiagramm:



Der Zufallsgenerator ZG erzeugt eine Zufallszahl z. Ein Suchalgorithmus sucht jetzt die Werte $\overline{F(t_{i-1})}$ und $\overline{F(t_i)}$, zwischen denen z liegt (siehe Abb.3). Durch lineare Interpolation wird das entsprechende t berechnet. Dieses Flußdiagramm ist als Unterprogramm in das große Simulationsprogramm dieser Arbeit eingebaut und besitzt den Namen TREFKT. Der Aufruf von TREFKT innerhalb des großen Programmes bewirkt die Erzeugung einer Zufallszahl, die annähernd gemäß F(t) verteilt ist. Man kann also TREFKT als speziellen Zufallsgenerator auffassen. Da man die Eingabe der $(t_i, \overline{F(t_i)})$ nicht bei jedem Aufruf von TREFKT durchführen möchte, nimmt man die Eingabe aus dem Unterprogramm heraus und liest die $(t_i, \overline{F(t_i)})$ nur einmal während des Hauptprogrammes ein, natürlich vor dem ersten Aufruf von TREFKT.

Bei einer großen Anzahl von Stützstellen empfiehlt es sich, um Rechenzeit zu sparen, den Suchalgorithmus zu verbessern. So kann man z.B. das Einheitsintervall, das bei vielen Stützstellen in fast ebenso viele Intervalle zerfällt, zuerst in größere Abschnitte aufteilen, indem man mehrere Intervalle zusammenfaßt. Als Kriterium der Aufteilung wählt man am besten die zu den Intervallen gehörenden Wahrscheinlichkeiten. Man läßt dann zuerst den Abschnitt suchen, in den z hineinfällt und verfährt dann innerhalb der Abschnitte wie oben beschrieben. Bei sehr vielen Stützstellen kann u.U. auf die lineare Interpolation verzichtet und einfach die entsprechende Intervallmitte genommen werden.

b) Geometrische Verteilung

Ein Zufallsexperiment, bei dem es um Erfolg oder Mißerfolg geht, nennt man ein Bernoulli-Experiment. Der Erfolg tritt mit der Wahrscheinlichkeit p, der Mißerfolg mit Wahrscheinlichkeit 1-p ein. Führt man ein solches Bernoulli-Experiment mehrfach hintereinander und unabhängig voneinander durch, so ist X, die Zahl der Mißerfolge, bis zum ersten Mal Erfolg eintritt, eine diskrete Zufallsvariable, die geometrisch verteilt ist mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X=x\} = (1-p)^x p, \quad x=0,1,2,.....$$

Die zu einem Bernoulli-Experiment gehörige Zufallsvariable (Zahl der Erfolge bei einmaliger Durchführung eines Bernoulli-Experimentes) nimmt den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit 1-p und den Wert 1 mit Wahrscheinlichkeit p an. Man nennt diese Zufallsvariable auch Bernoulli-Variable und die entsprechende Zweipunktverteilung auch Bernoulli-Verteilung[1)].

Um geometrisch verteilte Zufallszahlen zu erhalten, muß man mehrmals hintereinander das gleiche Bernoulli-Experiment simulieren, und zwar so lange, bis nach einer gewissen Zahl von Mißerfolgen zum ersten Mal Erfolg eintritt.

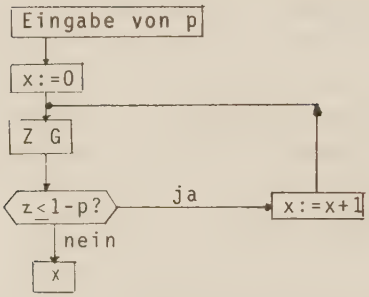
Die Bernoulli-Verteilung läßt sich sehr einfach realisieren. Man läßt sich eine Zufallszahl z erzeugen. Ist z kleiner oder gleich 1-p, so werden wir dieses Ereignis als Mißerfolg ansehen, ist z größer als 1-p, so werden wir das als Erfolg betrachten. Denn es ist klar, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine gleichförmig verteilte Zufallsvariable Z einen Wert zwischen 0 und 1-p annimmt, genau gleich 1-p ist. Man erkennt sofort, daß das beschriebene Vorgehen der Inversionsmethode bei einer diskreten Zufallsvariablen entspricht.

Die Simulation einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen liegt jetzt auf der Hand. Wir entnehmen dem Zufallsgenerator eine Zufallszahl z_1. Ist z_1 kleiner oder gleich 1-p, rufen wir die nächste Zufallszahl z_2 ab und prüfen wiederum, ob z_2 kleiner oder gleich 1-p ist.

Wir setzen dieses Verfahren solange fort, bis zum ersten Mal eine Zufallszahl erscheint, die größer als 1-p ist. Die Anzahl der Zufallszahlen, die kleiner oder gleich 1-p waren, ist dann eine Realisation einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen. Dazu ein kleines Flußdiagramm:

---

1) Vgl. Köcher u.a. (1972), S. 82.



Bei der Realisation der Geometrischen Verteilung kann man somit nie voraussagen, wieviel Zufallszahlen man benötigt. Dieses Flußdiagramm ohne die Eingabe von p trägt als Unterprogramm den Namen GEOM. Der Aufruf von GEOM bewirkt somit die Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallszahl. Somit ist GEOM ein spezieller Zufallsgenerator für geometrisch verteilte Zufallszahlen. Der Wert von p wird vor dem ersten Aufruf von GEOM über das Hauptprogramm eingelesen.

c) Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist eine kontinuierliche Verteilung und hat bekanntlich folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{für } x \geq o, \text{ wobei } \mu > o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $1/\mu$ der Erwartungswert und $1/\mu^2$ die Varianz dieser Verteilung. Die Verteilungsfunktion erhält man leicht durch Integration von 0 bis t:

$$\int_o^t f(x)dx = F(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Diese Funktion besitzt eine eindeutig definierte Umkehrfunktion. Wir setzen $z = 1-e^{-\mu t}$.
Die Auflösung nach t ergibt (Inversion):

$$t = -\frac{1}{\mu} \ln(1-z).$$

Da 1-z wie z über dem Einheitsintervall gleichförmig verteilt ist, ersetzen wir zur Vereinfachung 1-z durch z (Übergang von F(t) zu 1-F(t). Vgl. a) und erhalten folgende Transformationsformel:

$$t = \frac{1}{\mu} |\ln z|,$$

wobei ln der natürliche Logarithmus ist. Das auf diese Art errechnete t ist eine exponentiell verteilte Zufallszahl. Da die Exponentialverteilung in dieser Studie eine dominierende Rolle spielt, wird aus Gründen der Vergleichbarkeit bei jeder zu realisierenden Verteilung (außer der geometrischen Verteilung) der Obergang von z zu 1-z vollzogen, was äquivalent ist mit dem Obergang von F(t) zu 1-F(t).

d) Erlang-Verteilung

Eine erlangverteilte Zufallsvariable hat folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!}\, x^{k-1}\, e^{-k\mu x} \quad \text{mit } \mu>0,\ 0\leq x<\infty \text{ und } k \text{ eine natürliche Zahl.}$$

Es handelt sich um eine Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die je nach der Größe von k, der Zahl der Freiheitsgrade, ein anderes Aussehen haben. Der Erwartungswert dieser Verteilungen ist $1/\mu$ und die Varianz ist $1/k\mu^2$.

Man kann sich die Erlang-Verteilung aus k unabhängigen, exponentiell verteilten Zufallsvariablen entstanden denken: Eine erlangverteilte Zufallsvariable kann als Summe von k unabhängigen, exponentiell verteilten Zufallsvariablen aufgefaßt werden, alle mit Mittelwert $1/k\mu$. Für k=1 stimmt obige Dichtefunktion mit der Dichtefunktion der Exponentialverteilung überein.

Die Erlang-Verteilung spielt in der Warteschlangentheorie eine bedeutende Rolle[1]. Sie eignet sich besonders gut zur Approximation von empirischen, schiefen eingipfligen Verteilungen, die man bei der Untersuchung von Warteschlangen häufig als Zeitverteilungen antrifft. Wir wollen die Verteilungsfunktion F(t) bzw. $\overline{F(t)}$ berechnen, um eventuell die Inversionsmethode anzuwenden.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

$$\overline{F(t)} = \int_{t}^{\infty} f(x)dx = \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} \int_{t}^{\infty} x^{k-1} e^{-k\mu x}\, dx$$

---

1) Vgl. etwa Morse (1958), S. 41 ff.

Wir substituieren: $u = k\mu x$.

Dann ist $x = \frac{u}{k\mu}$ und $dx = \frac{du}{k\mu}$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\overline{F(t)} = \frac{1}{(k-1)!} \int_{k\mu t}^{\infty} u^{k-1} e^{-u}\, du.$$

Dieses Integral läßt sich durch mehrfache partielle Integration errechnen.

$$\int_{k\mu t}^{\infty} u^{k-1} e^{-u} du = -u^{k-1} e^{-u} \Big|_{k\mu t}^{\infty} + (k-1) \int_{k\mu t}^{\infty} u^{k-2} e^{-u}\, du$$

$$= (k\mu t)^{k-1} e^{-k\mu t} + (k-1)(k\mu t)^{k-2} e^{-\mu kt} + (k-1)(k-2) \int_{k\mu t}^{\infty} u^{k-3} e^{u} du$$

$$= (k\mu t)^{k-1} e^{-k\mu t} + (k-1)(k\mu t)^{k-2} e^{-k\mu t} + \ldots + (k-1)! e^{-k\mu t}$$

$$= (k-1)!\, e^{-k\mu t} \sum_{i=o}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!}$$

Somit ergibt sich für $\overline{F(t)}$:

$$\overline{F(t)} = e^{-k\mu t} \sum_{i=o}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!}$$

Setzt man nun $z = e^{-k\mu t} \sum_{i=o}^{k-1} \frac{(k\mu t)^i}{i!}$, so ist dieser Ausdruck nicht nach t auflösbar.

Durch Diskretisierung der Funktion $\overline{F(t)}$ kann man dennoch die Inversionsmethode anwenden. Dieses Vorgehen wurde in dieser Arbeit gewählt. Dazu braucht man nicht Werte für $\overline{F(t)}$ zu berechnen. Man findet nämlich $\overline{F(t)}$ in jedem größeren statistischen Tafelwerk indirekt tabelliert, und zwar muß man die Werte für die Erlang-Verteilung aus den Werten für die Chi-Quadrat-Verteilung errechnen. In dem Tafelwerk von Pearson u. Hartley (1966) findet man eine Tabelle für folgende Verteilungsfunktion:

$$G(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}\, dy$$

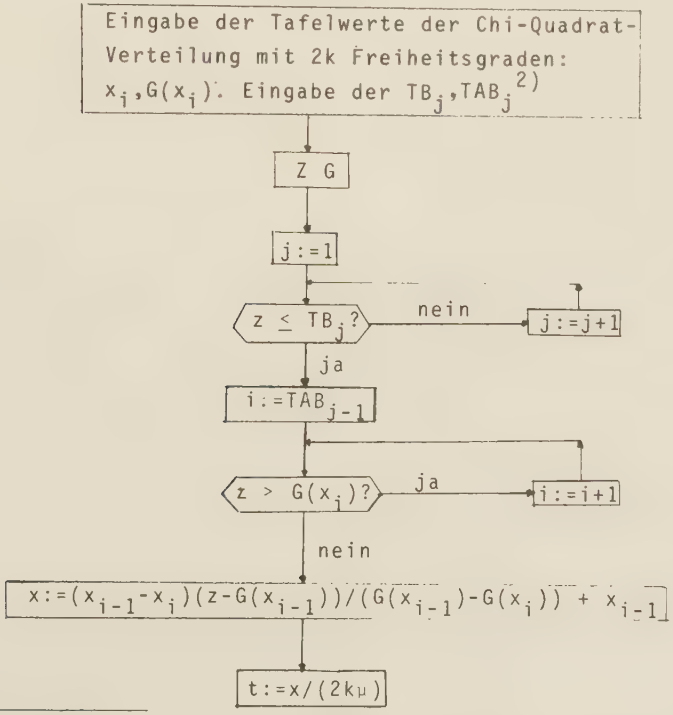
Dabei ist n die Zahl der Freiheitsgrade und $\Gamma(\frac{n}{2})$ ist die Eulersche Gammafunktion[1].

Setzt man nun n=2k und y=2kμs, ergibt sich die Funktion $\overline{F(t)}$:

$$G(x)= \overline{F(t)} = \frac{2^{-k}}{\Gamma(k)} \int_t^\infty e^{-k\mu s}(2k\mu s)^{k-1} 2k\mu ds \quad \text{mit } t=x/(2k\mu)$$

$$= \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} \int_t^\infty e^{-k\mu s}\, s^{k-1}\, ds$$

Man erhält also aus den tabellierten Werten von G(x) Werte für $\overline{F(t)}$ zu k Freiheitsgraden, indem man die Tabellenwerte der Chi-Quadrat-Verteilung zu 2k Freiheitsgraden durch 2kμ dividiert. Wir wollen die Realisation einer erlangverteilten Zufallsvariablen mit k Freiheitsgraden ebenfalls durch ein Flußdiagramm beschreiben:



1) Die Gammafunktion hat folgende Funktionalgleichung: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Daraus resultiert für ganzzahlige x die Formel: $\Gamma(k+1) = k!$

2) Die TB_j sind gewisse Werte $G(x_i)$, wobei TAB_j=i (vgl.nächste Seite)

Das Verfahren entspricht dem unter a) beschriebenen. Da die Anzahl der Tabellenwerte relativ groß ist (k=2:98, k=5:97 usw.), empfiehlt es sich, um Rechenzeit zu sparen dem unter a) gemachten Vorschlag bei vielen Stützstellen zu folgen und den Suchalgorithmus zu verbessern. Dazu teilt man zuerst das Einheitsintervall in einige nicht notwendig gleich große Intervalle auf. Als Grenzen dieser Intervalle wählt man geeignete $G(x_i)$-Werte, die mit TB_j bezeichnet werden. In einem ersten Schritt sucht nun obiges Programm, von links beginnend, dasjenige Intervall aus, in welches z fällt. Auf diese Art und Weise können ganze Gruppen von $G(x_i)$-Werten, die nicht in Frage kommen, übersprungen werden. Im zweiten Schritt werden nun innerhalb des entsprechenden Intervalles die Werte $G(x_{i-1})$ und $G(x_i)$ aufgesucht, zwischen die z zu liegen kommt. Durch lineare Interpolation findet man den z gehörenden x-Wert, der noch durch $2k\mu$ geteilt werden muß. Das Ergebnis t ist die Realisation einer erlangverteilten Zufallsvariablen mit k Freiheitsgraden. Dieser spezielle Zufallsgenerator zur Erzeugung erlangverteilter Zufallszahlen trägt als Unterprogramm den Namen ERL-K[1].

Es sei hier erwähnt, daß man sehr viel einfacher erlangverteilte Zufallszahlen erzeugen kann. Dazu nutzt man die Tatsache aus, daß eine erlangverteilte Zufallsvariable zu k Freiheitsgraden aufgefaßt werden kann als Summe aus k unabhängigen, exponentiell verteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert $1/k\mu$. Aus dieser Eigenschaft resultiert folgende Methode: Man erzeugt sich wie unter c) beschrieben k exponentiell verteilte Zufallszahlen, allerdings mit Mittelwert $1/k\mu$, und addiert sie auf. Diese Summe ist dann eine Realisation einer erlangverteilten Zufallsvariablen.

Nach dieser Methode benötigt man für eine erlangverteilte Zufallszahl immer k gleichförmig verteilte Zufallszahlen.

---

1) Die Eingabe gehört nicht zum Unterprogramm. Sie wird nur einmal während des Gesamtprogramms vor dem ersten Aufruf von ERL-K vorgenommen.

Aufgrund dieser Tatsache erwies sich diese Methode[1] für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen als ungeeignet, weil es sich meist um Doppelsimulationen handelt, bei denen zwei Verteilungen mit genau denselben Zufallszahlen realisiert werden sollen. Benötigt man für die Realisation der einen Verteilung mehr Zufallszahlen als für die Realisation der anderen, läßt sich eine solche Simulation nicht durchführen.

e) Hyperexponentielle Verteilung vom Typ 2.
Eine hyperexponentiell verteilte Zufallsvariable vom Typ 2 hat folgende Dichtefunktion:[2]

$$f(x) = 2\alpha^2\mu e^{-2\alpha\mu x} + 2(1-\alpha)^2\mu e^{-2(1-\alpha)\mu x} \quad 0<\alpha\leq 1/2$$

Diese Verteilung hat den Mittelwert $1/\mu$ und die Varianz h/μ^2, wobei $h = 1 + \frac{(1-2\alpha)^2}{2\alpha(1-\alpha)}$. Dieses h ist immer größer als 1 für $0<\alpha\leq 1/2$.

Durch Integration von t bis ∞ erhält man folgende Verteilungsfunktion:

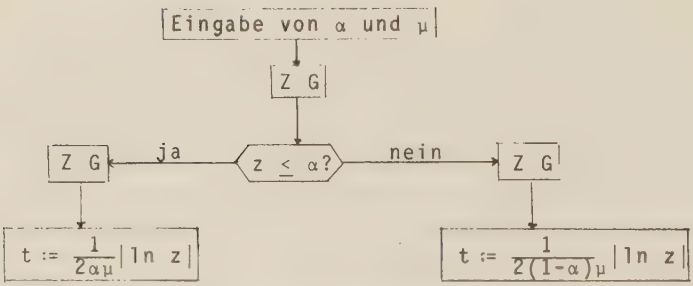
$$\int_t^\infty f(x)dx = \overline{F(t)} = \alpha e^{-2\alpha\mu t} + (1-\alpha)e^{-2(1-\alpha)\mu t}$$

Die Auflösung nach t zur Anwendung der Inversionsmethode ist nicht ohne weiteres möglich. Deshalb muß man ein anderes Vorgehen wählen. Man kann sich eine hyperexponentiell verteilte Zufallsvariable vorstellen als eine Variable, die mit Wahrscheinlichkeit α exponentiell verteilt ist mit Mittelwert $1/2\alpha\mu$ und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ exponentiell verteilt ist, jetzt mit Mittelwert $1/2(1-\alpha)\mu$. Zur Realisation einer hyperexponentiell verteilten Zufallsvariablen kann man folgendes Flußdiagramm benutzen:

---

1) Ein weiterer Nachteil dieser Methode ist der hohe Verbrauch an Zufallszahlen, vor allem bei großen k, im Hinblick auf die beschränkte Periodenlänge eines jeden Zufallsgenerators.

2) Vgl. Morse (1958), S. 52.



Dieses Flußdiagramm ohne die Eingabe heißt als Unterprogramm HYPEX. Mittels eines Bernoulli-Experimentes wird entschieden, ob eine exponentiell verteilte Zufallszahl mit Mittelwert $1/2\alpha\mu$ oder eine mit Mittelwert $1/2(1-\alpha)\mu$ erzeugt wird. Die so erhaltenen Zufallszahlen sind hyperexponentiell verteilt.

2. Varianzreduzierende Methoden als Monte-Carlo-Techniken

2.1 Allgemeine Einführung

2.1.1 Begriff und Bedeutung

Bei einer Monte-Carlo-Simulation steht man vor der Aufgabe, eine oder mehrere unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu simulieren. Das erfordert eine sehr hohe Anzahl unabhängig durchgeführter Wiederholungen der Simulation. Dabei stellt sich die Frage, wieviele Wiederholungen (Simulationsläufe) notwendig sind, um die gewünschte Verteilung einigermaßen zufriedenstellend zu erhalten. In den meisten Fällen wird man jedoch nicht an der gesamten Verteilung interessiert sein, sondern nur an gewissen Kenngrößen dieser Verteilung, wie z.B. Mittelwert (Erwartungswert) und Varianz bzw. Standardabweichung. Wenn man nur den Mittelwert einer Zufallsvariablen schätzen will, so könnte man einen einzigen, sehr langen Simulationslauf durchführen und das Ergebnis als Schätzung für den Mittelwert ansehen. Allerdings ist man dann nicht in der Lage, Fehlerschranken für diesen Schätzwert anzugeben.

Aus diesem Grunde wird man es vorziehen, mehrere kürzere Simulationsläufe durchzuführen. Legt man Wert auf Schätzgenauigkeit, benötigt man auch hier eine große Zahl von Simulationsläufen. Denn der Standardfehler ist bekanntlich umgekehrt proportional zu der Wurzel aus dem Stichprobenumfang (Quadratwurzelgesetz). Will man somit im Rahmen einer Simulation den Standardfehler halbieren, benötigt man eine viermal so große Anzahl von Simulationsläufen. Da man immer bestrebt sein muß, die Rechenzeit und somit die Kosten möglichst klein zu halten, wird man auf Verfahren sinnen, die ohne Erhöhung der Zahl der Simulationsläufe den Standardfehler verkleinert.

Statistische Verfahren, die die Anzahl der Simulationsläufe herabsetzen, ohne die gewünschte Schätzgenauigkeit zu vermindern bzw. Verfahren, die bei vorgegebener Anzahl der Simulationsläufe die Schätzgenauigkeit gegenüber der beim herkömmlichen Verfahren erreichbaren Genauigkeit wesentlich erhöhen, wollen wir unter den Begriff "Varianzreduzierende Methoden" zusammenfassen. Wir wollen also zwischen Verfahren, die die Zahl der Simulationsläufe (Stichprobenumfang) herabsetzen und Verfahren, die bei festem Stichprobenumfang die Schätzgenauigkeit erhöhen und somit den Standardfehler verkleinern, nicht unterscheiden.

Die Anwendung solcher Verfahren drängen sich bei Monte-Carlo-Simulation geradezu auf. Der effiziente Einsatz solcher Methoden erfordert gewisse a-priori-Kenntnisse quantitativer oder qualitativer Art über die stochastischen Eigenschaften des zu simulierenden Modells[1]. Da sich jedoch nur etwas Bekanntes nachahmen läßt, sind solche Kenntnisse sicherlich in mehr oder minder großem Umfange bei jeder Monte-Carlo-Studie vorhanden und sollten zur Konstruktion einer varianzreduzierenden Methode ausgenutzt werden.

---

1) Vgl. hierzu Ehrenfeld u. Ben-Tuvia (1962), Maxwell (1965), S. 2 oder auch Köcher u.a. (1972), S. 172.

2.1.2 Messung der Effizienz

In dieser Arbeit wird als Maß für die Effizienz[1] der Reduktionsfaktor σ_1/σ_2 verwendet, wobei σ_1 die Standardabweichung der Schätzung ist, die mittels einer varianzreduzierenden Methode gewonnen wurde und σ_2 die Standardabweichung der gewöhnlichen Schätzung. Ist dieser Faktor größer oder gleich Eins bringt die Methode keinen Vorteil.

Schneeweiß [2] schlägt vor, als Maß für die Effizienz die eigentliche Varianzreduktion σ_1^2/σ_2^2 zu nehmen. Da jedoch hauptsächlich Aussagen über die Genauigkeit eines Schätzwertes getroffen werden sollen, halte ich das Verhältnis der Standardabweichungen für das geeignetere Maß.

Diese Maße berücksichtigen allerdings nicht das Mehr an Rechenzeit und Arbeitsaufwand, das eine varianzreduzierende Methode mit sich bringt. Ein ökonomisches Effizienzmaß sollte neben der Varianzreduktion auch die Mehrkosten erfassen, die mit der komplizierteren Methode verbunden sind. Man könnte dann den Reduktionsfaktor mit einem Kostenfaktor zu folgendem Effizienzmaß kombinieren:

$$\frac{\sigma_1 \; K_1}{\sigma_2 \; K_2}$$

K_1 sind dabei die Kosten, die bei der komplizierteren Methode entstehen, K_2 die Kosten, die bei der einfachen Simulation entstehen. Die Kosten, K_1 wie auch K_2, setzen sich zusammen zum einen aus der Rechenzeit und zum anderen aus den Kosten für den Arbeitsaufwand des Experimentators. Die Kosten für die Rechenzeit sind zwar für jeden Maschinentyp verschieden, jedoch relativ leicht feststellbar. Die Kosten für den Arbeitsaufwand des Experimentators dürften sich jedoch schwer abschätzen lassen. Deshalb läßt man sie am besten in der Formel unberücksichtigt und setzt nur die Kosten für die Rechenzeit[3] ein.

---

1) Für den Fall der Reduktion der Anzahl der Simulationsläufe bei gleicher Schätzgenauigkeit sind die vorgeschlagenen Maße nicht geeignet. Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), S.173. In dieser Arbeit werden nur solche Verfahren betrachtet, die bei gleicher Anzahl von Simulationsläufen die Varianz verkleinern.

2) Köcher u.a. (1972), S. 173

3) Man kann auch nur die Rechenzeit einsetzen wie es Hammersley u. Handscomb(1964),S.51 für ihr Effizienzmaß vorschlagen.

2.1.3 Überblick über varianzreduzierende Methoden

Im Rahmen dieser Arbeit befassen wir uns mit der Methode der korrelierten Hilfsvariablen. Diese Methode wird im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben. In diesem Abschnitt wird ein Überblick über andere varianzreduzierende Methoden gegeben, wobei weder Anspruch auf Vollständigkeit erhoben noch Wert auf allzu große Ausführlichkeit gelegt wird. Diese Verfahren sind wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur und nutzen statistische Gesetzmäßigkeiten aus. Die meisten Verfahren sind in den USA entwickelt worden und teilweise schon aus der Stichprobentheorie bekannt. Im folgenden werden einige Verfahren aufgezählt:

Strategienvergleich
Antithetische Variablen
Korrelierte Hilfsvariable ("Control Variates"Methode)
Geschichtete Stichproben
"Importance Sampling" Methode
"Russian Roulette and Splitting" Methode
"Use of Expected Values" Methode

Es sei bemerkt, daß einige Verfahren eng miteinander verwandt sind. So nutzen die drei erstgenannten das Phänomen der Korrelation zwischen Zufallsvariablen aus, um eine Varianzreduktion herbeizuführen. Eine Beschreibung aller Verfahren würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es sei auf die entsprechende Literatur[1] verwiesen.

2.2 Die Methode der korrelierten Hilfsvariablen[2]

Das Anliegen der vorliegenden Untersuchung ist die Effizienz dieser Methode zu überprüfen. Dazu werden Monte-Carlo-Simulationen von Warteschlangen durchgeführt und die mittlere Warteschlangenlänge geschätzt. Wir wollen deshalb zur allgemeinen Beschreibung[3] dieser Methode annehmen, daß wir den

---

1) Vgl. etwa Kahn u. Marshall (1953), Meyer(1956), S.146 ff., Maxwell(1965), Hammersley u. Handscomb(1964), Kapitel 5, Tocher(1963), Kapitel 9, Köcher u.a.(1972), Kapitel 5.

2) Das Verfahren wurde aus der Stichprobentheorie übernommen. Vgl. etwa Cochran (1972),Kapitel 7, oder Stenger(1971),S.1o4ff.

3) Vgl. hierzu auch Köcher u.a. (1972), S.181 ff.

Mittelwert μ einer Zufallsvariablen X mittels einer Monte-Carlo-Studie schätzen wollen.

Nun sucht man sich eine zweite Zufallsvariable Y, die man zugleich mit X simulieren kann und die folgende Eigenschaft hat:

a) Y ist mit X hoch korreliert, d.h. der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} liegt nahe bei -1 oder +1.

b) Der Erwartungswert von Y ist bekannt: E(Y) = M.

Die Zufallsvariable Y wollen wir als korrelierte Hilfsvariable Y bezeichnen.[1] Nun kann man eine neue Zufallsvariable Z bilden:

$$Z = X - \beta(Y-M),$$

wobei β irgendeine reelle Zahl ist. Man sieht sofort, daß der Erwartungswert von Z ebenfalls μ ist. Z hat aber bei geeigneter Wahl von β eine u.U. bedeutend geringere Varianz als X. Um das zu zeigen, wollen wir die Varianz von Z berechnen:

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X-\beta Y)^{2)} = \text{Var}(X)+\beta^2\,\text{Var}(Y)-2\beta\,\text{COV}(X,Y)$$

Es stellt sich die Frage, für welchen Wert von β diese Varianz minimal wird. Dazu differenzieren wir die rechte Seite nach β und setzen die Ableitung Null. Es ergibt sich folgender Wert für β: $\beta = \text{COV}(X,Y)/\text{VAR}(Y)$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung für Var(Z) ein, erhält man:

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(X) - \text{COV}(X,Y)^2/\text{VAR}(Y).$$

Man erkennt, daß für diesen Wert von β die Varianz Var(Z) am kleinsten wird. Setzt man nun $\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2$, $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ und $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$, so erhält man:

$$\sigma^2_{Zmin} = \sigma_X^2 - \frac{\text{COV}(X,Y)^2}{\sigma_Y^2} = \sigma_X^2\left(1 - \frac{\text{COV}(X,Y)^2}{\sigma_X^2\,\sigma_Y^2}\right)$$

$$= \sigma_X^2\,(1-\rho_{XY}^2)$$

---

1) Wie man eine geeignete Hilfsvariable Y finden kann, wird auf den Seiten 36 bis 38 erörtert.

2) Es gilt nämlich: $\text{Var}(X-\beta Y+\beta M)=\text{Var}(X-\beta Y)$, da M eine Konstante ist.

Da $o \leq \rho^2_{XY} \leq 1$ gilt, erkennt man, daß die Varianz σ^2_Z mit Ausnahme für $\rho_{XY}=o$ immer kleiner als die Varianz σ^2_X ist. Die Reduktion ist umso größer, je stärker der lineare Zusammenhang zwischen X und Y ist.

Wären X und Y zwei Merkmale einer endlichen Grundgesamtheit, so wäre ß gerade der lineare Regressionskoeffizient bei der Regression von X auf Y.

Die Eigenschaften der Zufallsvariablen Z - gleicher Erwartungswert wie X, jedoch kleinere Varianz - wird jetzt bei einer Monte-Carlo-Simulation ausgenutzt, um eine varianzreduzierende Methode zur genaueren Schätzung von μ zu konstruieren. Dazu führt man folgende Doppelsimulation durch. Gleichzeitig mit der Zufallsvariablen X wird die Hilfsvariable Y simuliert. Wir nehmen an, daß wir n unabhängige Simulationsläufe durchführen. Wir erhalten also n Wertepaare (x_i,y_i). Wir können diese n Simulationsläufe als Stichprobe vom Umfang n aus einer unendlich großen, unbekannten Grundgesamtheit auffassen. Somit muß ß aus dieser Stichprobe geschätzt werden gemäß folgender Formel:

$$b = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}$$

Der Schätzwert b ist die Kleinstquadratschätzung für ß. Nun kann man folgende Werte berechnen:

$$z_i = x_i - b(y_i-M),\ i = 1,2,\ldots,n$$

Durch arithmetische Mitteilung der z_i erhält man einen Schätzwert für den unbekannten Mittelwert μ:

$$\bar{z} = \bar{x} - b(\bar{y} - M).\ ^{1)}$$

Da die z_i bedeutend weniger als die x_i variieren, ist $\bar{z}$ eine genauere Schätzung für μ als $\bar{x}$.

---

1) Man wird nicht die einzelnen z_i errechnen, sondern $\bar{z}$ sofort aus den arithmetischen Mitteln $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bestimmen.

Auch die Varianz σ_Z^2 muß aus der Stichprobe geschätzt werden, etwa nach folgender Formel:

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \hat{\sigma}_X^2 \, (1-\hat{\rho}_{XY}^2) \qquad (*)$$

Dabei ist $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (x_i-\bar{x})^2$ und $\hat{\rho}_{XY}^2 = b^2 \frac{\Sigma (x_i-\bar{x})^2}{\Sigma (y_i-\bar{y})^2} = b^2 \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}$

Somit ist die Varianz der Schätzung $\bar{z}$ wie folgt zu schätzen:

$$\hat{\sigma}_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{n} \hat{\sigma}_Z^2 \, .$$

Nun läßt sich mit vorgegebener Aussagesicherheit ein Konfidenzintervall für den unbekannten Mittelwert μ angeben:

$$P(\bar{z}-t\hat{\sigma}_{\bar{z}} \leq \mu \leq \bar{z} + t\hat{\sigma}_{\bar{z}}) \cong \emptyset(t),$$

wobei $\emptyset(t)$ die vorgegebene Aussagesicherheit ist. Außerdem muß man etwas über Verteilung von $\bar{z}$ wissen, um t angeben zu können.

Zwei Einwände lassen sich gegen das geschilderte Verfahren vorbringen:

a) Die Schätzung $\bar{z}$ und $\hat{\sigma}_{\bar{z}}^2$ sind nicht erwartungstreu.

b) Die Varianz von Z wird nicht wirklich minimiert.

Beide Einwände beruhen auf der Tatsache, daß die Größe ß unbekannt ist und durch die Stichprobengröße b geschätzt werden muß.

Stenger (1971)[1] beweist, daß $\bar{z}$ und $\hat{\sigma}_{\bar{z}}^2$ asymptotisch erwartungstreu sind. Der Bias von $\bar{z}$ ist von der Größenordnung $o(\frac{1}{n})^2$, der Bias von $\hat{\sigma}_{\bar{z}}^2$ von der Größenordnung $o(\frac{1}{n3/2})$.

Bei der Varianz σ_Z^2 handelt es sich um die Residualvarianz bei der Regression von X auf Y. Sie läßt sich erwartungstreu[3] schätzen durch folgende Schätzformel:

---

1) Stenger (1971), S. 1o9

2) Stenger (1971), S. 46

3) Vgl. etwa Schneeweiß (1971), S. 63 f.

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{n-2}\left[\Sigma(x_i-\bar{x})^2 - b^2\,\Sigma(y_i-\bar{y})^2\right].$$

Somit läßt sich der Bias von (*) beseitigen, wenn man die rechte Seite von (*) mit dem Korrekturfaktor (n-1)/(n-2) multipliziert.

Tocher (1963)[1] hat Überlegungen angestellt, wie man den Bias von $\bar{z}$ beseitigen kann. Dazu schlägt er vor, die Stichprobe, die aus n simulierten Wertepaaren (x_i,y_i) besteht, in zwei Schichten aufzuteilen S_1 und S_2, wobei die Schicht S_1 gerade n_1 Wertepaare enthält, die Schicht S_2 gerade n_2 mit $n_1 + n_2 = n$. Jetzt werden folgende Größen berechnet:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{x_i \in S_k} x_i,\quad \bar{y}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{x_i \in S_k} y_i$$

$$b_k = \frac{\Sigma\,(x_i-\bar{x}_k)(y_i-\bar{y}_k)}{\Sigma(y_i-\bar{y}_k)^2} \text{ mit } (x_i,y_i) \in S_k,$$

wobei k=1 oder 2 ist.

Es wird nun für jede Schicht eine Schätzung für μ nach der beschriebenen Methode berechnet, allerdings mit dem Unterschied, daß bei der Schätzung für μ aus S_1 der Wert b_2 verwendet wird und umgekehrt. Denn jetzt ist b_2 von $\bar{x}_1$ und $\bar{y}_1$ unabhängig, b_1 von $\bar{x}_2$ und $\bar{y}_2$. Somit erhält man zwei unverzerrte Schätzungen für μ:

$$\bar{z}_k = \bar{x}_k - b_{3-k}(\bar{y}_k - M)\ ,\ k = 1,2.$$

Diese beiden Schätzwerte werden durch einfache arithmetische Mitteilung[2] zu einem Gesamtschätzwert für μ:

$$\bar{z} = \tfrac{1}{2}(\bar{z}_1+\bar{z}_2).$$

---

1) Tocher (1963), S. 115 f.

2) Bei verschiedenen n_1 und n_2 wäre ein gewogenes arithmetisches Mittel geeigneter.

Die Varianz dieser Schätzung wird geschätzt durch

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{z}} = \frac{2}{n}\,\hat{\sigma}^2_X(1-\hat{\rho}^2_{XY}).\quad 1)$$

Sie ist also doppelt so groß wie bei dem ursprünglichen Verfahren. Außerdem hat sie einen Bias von der Größenordnung $o(\frac{1}{n^2})$.

Den unangenehmen Nebeneffekt der Verdoppelung der Varianz kann man weitgehend ausschalten, wenn man anstatt zweier Schichten k Schichten bildet, jeweils vom Umfang n/k.

Dann berechnet man folgende Größen

$$\bar{x}_j = \frac{k}{(k-1)n} \sum_{x_i \notin S_j} x_i, \quad \bar{y}_j = \frac{k}{(k-1)n} \sum_{y_i \notin S_j} y_i$$

$$b_j = \frac{\Sigma (x_i-\bar{x}_j)(y_i-\bar{y}_j)}{\Sigma (y_i-\bar{y}_j)^2} \text{ mit } (x_i,y_i) \notin S_j$$

Diese Größe b_j, die aus allen Werten berechnet wurde, die nicht zu S_j gehören, wird jetzt dazu verwendet, einen Schätzwert für μ in der j-ten Schicht zu berechnen. Dazu benötigt man noch die arithmetischen Mittel der x_i- und y_i-Werte in der j-ten Schicht:

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{k}{n} \sum_{x_i \in S_j} x_i, \quad \bar{\bar{y}}_j = \frac{k}{n} \sum_{y_i \in S_j} y_i$$

In jeder Schicht erhält man einen unverzerrten Schätzwert für μ:

$$\bar{z}_j = \bar{\bar{x}}_j - b_j(\bar{\bar{y}}_j - M)$$

Diese Schätzwerte werden zu einem Gesamtschätzwert gemittelt:

$$\bar{z} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \bar{z}_j$$

Das ist ebenfalls ein unverzerrter Schätzwert für μ. Die zugehörige Varianz wird durch folgenden Ausdruck geschätzt:

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{z}} = \frac{1}{n}\,\frac{k}{k-1}\,\hat{\sigma}^2_X(1-\hat{\rho}^2_{XY})$$

---

1) Vgl. Tocher (1963), S. 116. Die kleinste Varianz für $\bar{z}$ erhält man nur, wenn man $n_1=n_2=n/2$ setzt, also bei paritätischer Aufteilung von n.

Sie hat einen Bias in der Größenordnung von $o(\frac{k^2}{n})$ [1]
Dieses Schichtenverfahren von Tocher wird in dieser Arbeit nicht angewandt. Wir werden einen Bias in Kauf nehmen und den Einfluß dieser Verzerrung auf die Schätzungen des zuerst geschilderten Verfahrens (Verfahren A) studieren.

Zum zweiten Einwand ist lediglich zu bemerken, daß man das wahre Minimum nicht erreichen wird, aber sicherlich in die Nähe des Minimums gelangt.
Es existiert eine einfachere Variante des Verfahrens A, die wir mit Verfahren B bezeichnen wollen. Haben nämlich X und Y ungefähr gleich große Varianz und ist die Korrelation zwischen beiden Variablen besonders hoch, also nahe bei +1 oder -1, so kann man $\beta=1$ (bzw. $\beta=-1$) setzen und Z als einfache Differenz (bzw. Summe) von X und Y definieren:

$$Z = X - (Y - M).$$

Die zugehörige Varianz lautet:
$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$ bzw.
$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y$.
Damit überhaupt eine Varianzreduktion eintritt, muß

$\sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y < o$ sein. Also $\sigma_Y/\sigma_X < 2\rho$.

Für $\rho=1$ [2] ergibt sich für σ_Z^2 :

$$\sigma_Z^2 \cong \sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \left(1 - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2 .$$

Führt man nun n Simulationen der Zufallsvariablen X und Y durch, so wird μ erwartungstreu geschätzt durch

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} + M.$$

Es handelt sich also um eine echte Differenzenschätzung.
Es empfiehlt sich nicht, die Varianz von σ_Z^2 etwa durch

$$\hat{\sigma}_Z^2 = (\hat{\sigma}_X - \hat{\sigma}_Y)^2$$

---

1) Tocher (1963), S. 116. Damit der Bias sich nicht zu unangenehm bemerkbar macht, darf k im Vergleich zu n nicht zu groß gewählt werden.

2) Die Berechtigung für das Vorgehen erkennt man an der Formel

$$\hat{\rho}_{XY} = b\,\frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X}.$$

mit $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma(x_i-\bar{x})^2$ und $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma(y_i-\bar{y})^2$ zu schätzen. Durch die Ersetzung von $\hat{\rho}_{XY}$ durch 1 in der Formel für $\hat{\sigma}_Z^2$ wird u.U. eine trügerische Varianzreduktion aufgezeigt. Man denke z.B. an den Fall zweier Zufallsvariablen, die schwach miteinander korreliert sind, aber ungefähr gleiche Varianz haben. Die Verwendung obiger Formel könnte zu einem falschen Bild über die tatsächliche Varianzreduktion führen.

Aus diesem Grunde sollte die Varianz σ_Z^2 nach einer der folgenden Formeln geschätzt werden:

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i-\bar{z})^2 \qquad \text{oder}$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \hat{\sigma}_X^2 + \hat{\sigma}_Y^2 - 2\ \mathrm{cov}(x,y)$$

mit $\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$.

Die Varianz von $\bar{z}$ wird dann wie folgt geschätzt:

$$\hat{\sigma}_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{n} \hat{\sigma}_Z^2$$

Allerdings ist festzustellen, daß dieses Verfahren bei sehr unterschiedlichen Varianzen trotz hoher Korrelation versagen kann.

Generell ist festzustellen, daß das ursprüngliche Verfahren (Verfahren A) an Mehrarbeit nur die Berechnung von b und $\hat{\rho}_{XY}$ erfordert. Für einen Computer der heutigen Generation bedeutet das eine Rechenzeitverlängerung von Bruchteilen von Sekunden und die Speicherung zusätzlich zweier Größen. Dieses minimale Mehr an Rechenzeit und -aufwand von Verfahren A stellt die Bedeutung von Verfahren B in Frage.

Da es keinerlei Mühe bereitet, zugleich mit der ursprünglicheren Methode auch die einfachere Variante auszuprobieren, werden bei den in dieser Studie durchgeführten Simulationen beide Verfahren nebeneinander gestellt.

Eine weitere Variante von Verfahren A erhält man, wenn man mehrere Hilfsvariablen mit bekanntem Mittelwert zur Verfügung hat und diese zusammen mit X simuliert. Die entsprechende Zufallsvariable lautet dann:

$$Z = X - \beta_1(Y_1-M_1) - \beta_2(Y_2-M_2) - \ldots - \beta_l(Y_l-M_l),$$

dabei ist jede Hilfsvariable Y_j mit X hoch korreliert und hat den bekannten Erwartungswert $E(Y_j) = M_j (1 \leq j \leq l)$. Es wird also eine multiple Regression von X auf die Hilfsvariablen Y_j vorgenommen. Den Bias, der bei der Schätzung von μ durch die Schätzfunktion

$$\bar{z} = \bar{x} - b_1(\bar{y}_1-M_1) - \ldots - b_l(\bar{y}_l-M_l)$$

entsteht, könnte man beseitigen, indem man die Stichprobe, die aus n (l+1)-Tupel von Werten $(x_1,y_1,\ldots,y_l)$ besteht, in k gleiche Schichten unterteilt und für jedes b_j k Schätzwerte gemäß dem Tocherschen Verfahren von Seite 32 berechnet, die unabhängig von den jeweiligen Mittelwerten der einzelnen Schichten sind.

Die Varianz von Z, die Residualvarianz, kann nach der Formel (*) geschätzt werden, wobei aus Gründen der Erwartungstreue[1] die Formel (*) mit dem Korrekturfaktor $(n-1)/(n-l-1)$ multipliziert werden sollte. Außerdem ist der multiple Korrelationskoeffizient einzusetzen. Dieses Verfahren ist naturgemäß sehr aufwendig. Nur wenn der multiple Korrelationskoefizient wesentlich größer ist als die einfachen Korrelationskoeffizienten zwischen X und Y_j, kann dieses Verfahren effizienter arbeiten. Außerdem ist zu beachten, daß durch den Korrekturfaktor die Varianz ohnehin vergrößert wird. Der u.U. sich einstellende Gewinn an Effizienz gegenüber Verfahren A kann so klein sein, daß sich der Aufwand nicht bezahlt macht. Aus diesem Grunde ist dem Praktiker zu empfehlen für den Fall, daß er zwischen mehreren Hilfsvariablen wählen kann, Verfahren A anzuwenden mit derjenigen Hilfsvariablen, die die mutmaßlich größte Korrelation mit X hat. Sollte sich keine

---

1) Vgl. Schneeweiß (1971), S. 11o.

zufriedenstellende Varianzreduktion einstellen, kann er immer noch nach der aufwendigeren Methode vorgehen.

Wir werden im Rahmen dieser Arbeit unser Hauptaugenmerk auf Verfahren A legen. Es stellt sich noch die Frage, wie eine geeignete Hilfsvariable Y zu finden ist, die mit X hoch korreliert ist und einen bekannten Erwartungswert M hat. Schneeweiß[1] macht drei Vorschläge:

a) Modellimmanente Variable: Wie bereits gesagt, muß die Zufallsvariable X aus Variablen mit bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen erschlossen werden. Weiß man von einer solchen Eingangsvariablen, daß sie mit X hoch korreliert ist, kann sie als Hilfsvariable benutzt werden. Die Hilfsvariable braucht nicht unbedingt eine Eingangsvariable zu sein, sie kann auch aus ihnen abgeleitet sein. Wichtig ist nur, daß sie mit X korreliert ist und daß man ihren Erwartungswert kennt.

b) Zufallsvariable unter alternativen Parameterwerten: Die Simulation einer Zufallsvariablen X unter alternativen Parameterwerten nennt man auch parametrisches Simulieren. Darunter versteht man folgendes: Man simuliert das gleiche Modell mehrmals, wobei bei jedem Simulationslauf der Wert eines bestimmten Modellparameters W abgeändert wird. Auf diese Art und Weise kann man den Einfluß einer Parameteränderung auf das stochastische Verhalten des Modells studieren. Als korrelierte Hilfsvariable kann man jetzt die Zufallsvariable X bei einem fest vorgegebenen, möglichst zentral gelegenen Wert von W nehmen. Wir wollen die Zufallsvariable X unter dem speziellen Parameterwert w jetzt X_w nennen. Der bei der Simulation von X_w anfallende Mittelwert $\bar{x}_w$ spielt die Rolle von M. Wir machen also die Annahme, daß der Erwartungswert $M_w=E(X_w)$ durch $\bar{x}_w$ so genau geschätzt wird, daß man ihn als bekannt voraussetzen kann. Führt man

---

1) Vgl. Köcher u.a. (1972), S. 184 ff.

jetzt Modellsimulationen mit verschiedenen Werten von W durch, kann man X_w als korrelierte Hilfsvariable mit bekanntem Erwartungswert M_w verwenden. Die Schätzfunktion für das arithmetische Mittel von X lautet somit:

$$\bar{z} = \bar{x} - b(\bar{x}_w - M_w),$$

wobei M_w das arithmetische Mittel der Realisationen von X_w aus einem früheren Simulationslauf ist[1]. Da M_w mit einem Schätzfehler behaftet ist, wird sich die Varianz von $\bar{z}$ etwas erhöhen[2], was die Effizienz des Verfahrens herabsetzt.

c) Variablen aus einem Hilfsmodell: Hat man ein reales Modell durch ein mathematisches ersetzt, so steht man oft vor der Entscheidung, das mathematische Modell zu simulieren, weil seine Lösung auf analytischem Wege nicht erreichbar ist, oder das mathematische Modell derart zu vereinfachen, daß es auf mathematischem Wege analysierbar wird. Allerdings wird im letzteren Fall ein solch vereinfachtes Modell die Realität oft nur noch schlecht widerspiegeln, so daß seine Ergebnisse ohne Vorbehalte nicht mehr auf die Wirklichkeit übertragbar sind. Man wird dann der Simulation den Vorrang geben. Dennoch kann die Existenz eines vereinfachten, mathematisch analysierbaren Modells von Nutzen sein.

Wir wollen annehmen, daß wir zwei Modelle zur Verfügung haben: Ein Modell A, das wir simulieren wollen (Hauptmodell), und ein Modell B (Hilfsmodell), welches durch Vereinfachung aus Modell A entstanden ist. Außerdem ist Modell B einer mathematischen Analyse zugänglich, d.h. alle auftretenden Variablen, insbesondere die Zufallsvariablen mit ihren Verteilungsgesetzen, sind uns bekannt. Beide Modelle werden Variablen enthalten, die sich einander entsprechen. Gemeint sind Variable, die in beiden Modellen eine ähnliche Rolle spielen. Aufgrund der Verwandtschaft der beiden Modelle ist anzunehmen, daß entsprechende Variable mehr oder minder hoch korreliert sind.

---

1) Die in jedem Simulationslauf gewonnen Realisationen von X_w können immer wieder zu einer Verbesserung des Wertes von M_w verwendet werden.

2) Vgl. hierzu Maxwell (1965), S.7.

Steht man vor der Aufgabe, die Zufallsvariable X des Hauptmodells zu simulieren, so hat man in der entsprechenden Variablen des Hilfsmodells eine korrelierte Hilfsvariable Y, deren Erwartungswert aufgrund der Analysierbarkeit des Hilfsmodells bekannt ist und die somit für Verfahren A eingesetzt werden kann.

Es sei bemerkt, daß die zusätzliche Simulation eines Hilfsmodells bedeutend mehr Rechenzeit und Arbeitsaufwand erfordert als etwa die Simulation einer modellimmanenten Variablen, die möglicherweise als Bestandteil des Modells sowieso simuliert werden muß. Aus diesem Grunde sollte man darauf achten, daß die Hilfsvariable möglichst hoch mit der zu untersuchenden Variablen korreliert ist, um den Mehraufwand durch eine möglichst große Varianzreduktion wettzumachen. Die Höhe der Korrelation hängt vom "Verwandtschaftsgrad" der beiden Modelle ab. Je ähnlicher das Hilfsmodell dem Hauptmodell ist, umso höher wird die Korrelation zwischen X und Y ausfallen.

Zu den Vorschlägen b) und c) ist folgende wichtige Bemerkung zu machen: Die Korrelation zwischen der Variablen X und der zugehörigen Hilfsvariablen Y wird sich bei der Simulation nur dann einstellen, wenn dieselben Zufallszahlen zur Realisation der Variablen X und Y verwandt werden. Bei Vorschlag a) wird die Hilfsvariable als Bestandteil des Modells mitsimuliert. Aus diesem Grunde können nicht die gleichen Zufallszahlen verwandt werden. Oft benötigt man auch für eine Realisation von X mehrere Zufallszahlen. Deshalb wird auch die Korrelation zwischen X und Y im Fall a) nicht allzu hoch sein.

3. Die Simulation von Wartesystemen

3.1 Allgemeine Beschreibung von Wartesystemen

Ein Wartesystem besteht aus einem Engpaß, den gewisse Einheiten - wir wollen sie im folgenden Kunden nennen - passieren wollen. Diesen Engpaß kann man auch als Bedienungsstation auffassen, vor der in meist unregelmäßigen Zeitabständen Kunden eintreffen und Bedienung verlangen. Dabei kann es vorkommen, daß die eintreffenden Kunden die Bedienungsstation besetzt vorfinden und warten müssen. Es bildet sich dann eine Warteschlange vor der Station. Auch die Bedienungs- oder Abfertigungszeiten der Kunden sind meist zufälligen Schwankungen unterworfen.

Im wesentlichen läßt sich ein Wartesystem durch folgende drei Charakteristiken beschreiben, den Ankunftsprozeß, den Abfertigungsprozeß und die Schlangendisziplin.[1)]

a) Ankunftsprozeß

Es sei λ die durchschnittliche Ankunftsrate, d.h. die Zahl der Kunden, die im Mittel in der Zeiteinheit eintreffen. Sofern die Ankünfte nicht in regelmäßigen Zeitabständen erfolgen, gehorchen sie einem Wahrscheinlichkeitsgesetz. Dabei gibt man meist nicht die Verteilung der Ankünfte an, sondern die Verteilung der sogenannten Zwischenankunftszeiten. Die Zwischenankunftszeit ist die Zeit, die zwischen der Ankunft eines Kunden und der Ankunft des nächstfolgenden verstreicht. Meistens wird angenommen, daß die Zwischenankunftszeiten unabhängig voneinander sind und daß sich ihr Verteilungsgesetz während der Beobachtungsperiode nicht ändert.

Wir wollen in dieser Arbeit nur solche Wartesysteme simulieren, deren Ankunftsprozeß ein Poissonprozeß ist. Bei einem Poissonprozeß - man spricht auch von einem reinen Zufallsprozeß - sind die Ankünfte poissonverteilt (Poisson-Ankünfte) und die Zwischenankunftszeiten exponentiell verteilt mit Mittelwert $1/\lambda$.

---

1) Vgl. Schneeweiß (1960).

b) Abfertigungsprozeß

Eine Bedienungsstation kann aus mehreren Abfertigungsstellen, auch Kanäle genannt, bestehen, die parallel oder in Serie angeordnet sein können. Im letzteren Fall muß der Kunde mehrere Abfertigungsstellen hintereinander durchlaufen. Jeder dieser Kanäle ist charakterisiert durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bedienungszeiten. Auch hier nimmt man gemeinhin an, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Kanals während der Beobachtungsperiode nicht ändert und daß die Bedienungszeiten voneinander unabhängig sind. Ist μ die mittlere Abferigungsrate eines Kanals, so ist $1/\mu$ die mittlere Bedienungszeit des betreffenden Kanals.

c) Schlangendisziplin

Die Schlangendisziplin sagt etwas aus über das Verhalten der Kunden angesichts einer besetzten Station und etwas über die Reihenfolge ihrer Abfertigung. Wir wollen im folgenden immer annehmen, daß die eintreffenden Kunden in der Reihenfolge ihrer Ankunft abgefertigt werden ("first come-first served"). Außerdem wird jeder eintreffende Kunde abgefertigt. Das impliziert, daß die Schlange beliebig lang werden darf (offenes System) und daß kein Kunde vorzeitig, etwa aus Ungeduld, die Schlange verläßt.

Der eigentlich interessierende stochastische Prozeß, die Warteschlange, kann dann als das Resultat des Zusammenwirkens zweier unabhängiger stochastischer Prozesse, des Ankunfts- und des Abfertigungsprozesses, aufgefaßt werden. Im Prinzip ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Warteschlange aus dem Ankunfts- und dem Abfertigungsprozess, die als bekannt vorausgesetzt werden, herleitbar. In Fällen jedoch, wo die mathematische Herleitung Schwierigkeiten bereitet, wird man zum Mittel der Simulation greifen, etwa um die mittlere Schlangenlänge zu schätzen. Die Wartesysteme, die in dieser Arbeit verwendet werden, bedürfen keiner Simulation - sie sind bis auf eine Ausnahme theoretisch vollständig erfaßt. Daß wir dennoch solche Systeme simulieren, liegt im Ziel dieser Arbeit begründet: Wir wollen die Effizienz des Verfahrens der korrelierten Hilfsvariablen

überprüfen. Dazu eignen sich theoretisch analysierbare Modelle besonders gut: Man kann die Qualität dieses Schätzverfahrens kontrollieren durch Gegenüberstellung der theoretischen Werte und der durch Simulation geschätzten Werte. Generell ist zu bemerken, daß sich diese analysierbaren Systeme bei der Simulation von komplizierten Wartesystemen als Hilfsmodelle anbieten.

Eine wichtige Größe zur Charakterisierung eines Wartesystems ist das Verhältnis $\kappa=\lambda/\mu$, die sogenannte Kapazitätsausnutzung oder auch Kapazitätsauslastung des Systems. Bei mehreren Kanälen ist μ die Summe der mittleren Abfertigungsraten der einzelnen Kanäle. Im folgenden werden wir durch geeignete Wahl von λ und μ darauf achten, daß $\kappa<1$. Das garantiert uns, daß der stochastische Prozeß nach einer gewissen Einschwingphase seinen stationären Zustand erreicht. In der stationären Phase sind Zustandswahrscheinlichkeiten, Obergangswahrscheinlichkeiten und Kenngrößen der Verteilung wie z.B. Mittelwert und Varianz von dem Anfangszustand und von der Zeit unabhängig. Es stellt sich die Frage, wann ein Prozeß als stationär anzusehen ist. Da wir uns in dieser Studie nur für die stationäre Phase der untersuchten Wartesysteme interessieren, werden wir auf das Problem des Erreichens der stationären Phase bei einem Simulationsexperiment in einem gesonderten Abschnitt eingehen.

3.2 Die verwendeten Wartesysteme

3.2.1 Das System M/M/1[1)]

Bei diesem System sind die Zwischenanlaufzeiten und die Abfertigungszeiten exponentiell verteilt. Eine Abfertigungsstelle mit exponentiell verteilten Bedienungszeiten wollen wir im folgenden exponentiellen Kanal nennen.

1) Kendall (1953) führte zur Charakterisierung von Wartesystemen diese Kurzsymbolik ein. Der erste Buchstabe kennzeichnet die Verteilung der Zwischenankunftszeiten, der zweite die Verteilung der Abfertigungszeiten. Die anschließende Zahl gibt die Anzahl der parallelen Abfertigungsstellen an. Die Schlangendisziplin ist aus dieser Symbolik nicht ablesbar. Im einzelnen bedeutet M die Exponentialverteilung, E_k die Erlang-Verteilung mit k Freiheitsgraden, G eine allgemeine Verteilung, die nicht näher spezifiziert ist, und H_m die Hyperexponentialverteilung vom Typ m.

Für die stationäre Phase dieses Systems gelten folgende Formeln:[1)]

Die mittlere Anzahl der Kunden im System beträgt:

$$L = \frac{\kappa}{1-\kappa} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Die eigentliche mittlere Warteschlangenlänge kann wie folgt berechnet werden:

$$L_S = L - \kappa = \frac{\kappa^2}{1-\kappa} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

L_S ist also die mittlere Zahl der Kunden im System ausschließlich der sich in der Abfertigung befindlichen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß genau n Kunden sich im System befinden, beträgt

$$P_n = \kappa^n(1-\kappa).$$

P_n ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Zustand n befindet (Zustandswahrscheinlichkeit). Die Zahl der Kunden im System ist somit geometrisch verteilt. Die Wahrscheinlichkeit, daß kein Kunde im System ist, daß die Station leer ist, beträgt $1-\kappa$. Man kann somit κ deuten als die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kunde warten muß. Bei großen κ wird sich somit eine große Warteschlange einstellen, was auch die Formel für L bestätigt.

Es sei noch erwähnt, daß L der Erwartungswert obiger Verteilung ist und somit wie folgt errechnet wird:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n$$

Die Herleitung der P_n ist ein zentrales Problem jedes Wartesystems.

3.2.2 Das System M/M/2

Die Bedienungsstation besteht aus zwei parallelen exponentiellen Kanälen, wobei Kanal I die Kunden mit der Rate μ_1, Kanal II

---

1) Eine ausführliche Herleitung dieser Größen findet man etwa bei Schneeweiß (1960) oder auch bei Morse (1958), S. 21 f.

die Kunden mit der Rate μ_2 abfertigt. Beide Kanäle zusammen sind als eine Bedienungsstation aufzufassen, vor der sich nur eine einzige Warteschlange bilden kann. Im Falle, daß ein Kunde die Station leer (beide Kanäle frei) vorfindet, wählt er mit Wahrscheinlichkeit α Kanal I und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ Kanal II zu seiner Abfertigung aus. In allen übrigen Fällen geht der Kunde möglicherweise nach einer gewissen Wartezeit in die jeweils freiwerdende Abfertigungsstelle.

Die Kapazitätsausnutzung dieses Systems beträgt somit $\kappa=\lambda/(\mu_1+\mu_2)$. Kaufmann und Cruon (1961)[1] haben dieses System behandelt. Die Herleitung und die Formeln für P_n und L sind jedoch fehlerhaft. Aus diesem Grunde werden diese Größen im folgenden noch einmal neu berechnet.

Dazu macht man die üblichen Annahmen: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kunde in einem beliebig kleinen Zeitraum Δt ankommt, ist $\lambda\Delta t$; die Wahrscheinlichkeit, daß Δt ein Kunde abgefertigt wird, ist $\mu_1\Delta t$ bzw. $\mu_2\Delta t$; außerdem wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als ein Kunde in Δt ankommt bzw. mehr als ein Kunde in Δt abgefertigt wird, vernachlässigbar klein ist. Wenn wir nun die Wahrscheinlichkeit $P_n(t+\Delta t)$ angeben wollen, die Wahrscheinlichkeit also, daß sich das System zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ im Zustand n befindet, brauchen wir, aufgrund der letzten Voraussetzung, nur die Übergänge von n+1 nach n und n-1 nach n bzw. das Verharren im Zustand n zu betrachten. Die Wahrscheinlichkeiten des Übergangs aus anderen Zuständen nach n sind praktisch Null.

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand n+1 nach n ergibt sich somit als das Produkt der Wahrscheinlichkeiten, daß in Δt
a) ein Kunde weggeht: $(1-\mu_1\Delta t)\mu_2\Delta t + (1-\mu_2\Delta t)\mu_1\Delta t$
b) kein Kunde ankommt: $1-\lambda\Delta t$

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand n-1 nach n ergibt sich als das Produkt der Wahrscheinlichkeiten, daß in Δt

---

1) Kaufmann u. Cruon (1961), S. 66 ff.

a) ein Kunde ankommt: $\lambda\Delta t$

b) kein Kunde weggeht: $(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das System im Zustand n verharrt, ergibt sich als das Produkt der Wahrscheinlichkeiten, daß in Δt

a) kein Kunde ankommt: $1-\lambda\Delta t$

b) kein Kunde weggeht: $(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$,

wobei angenommen wird, daß die Wahrscheinlichkeit für eine Ankunft und eine Abfertigung in Δt ebenfalls vernachlässigbar klein ist.

Für $n>2$ ergibt sich für $P_n(t+\Delta t)$:

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n+1}(t)[(1-\mu_1\Delta t)\mu_2\Delta t + (1-\mu_2\Delta t)\mu_1\Delta t](1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) + P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)$$

Für $n=2$ ergibt sich:

$$P_2(t+\Delta t) = P_3(t)[(1-\mu_1\Delta t)\mu_2\Delta t + (1-\mu_2\Delta t)\mu_1\Delta t](1-\lambda\Delta t) + P_2(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) + P_1^I(t)\lambda\Delta t(1-\mu_1\Delta t) + P_1^{II}(t)\lambda\Delta t(1-\mu_2\Delta t),$$

dabei ist $P_1^I(t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Zustand I befindet und Kanal I besetzt ist, analog $P_1^{II}(t)$.

Für $n=1$ ergibt sich:

$$P_1^I(t+\Delta t) = P_2(t)\mu_2\Delta t + P_1^I(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_1\Delta t) + P_o(t)\alpha\lambda\Delta t$$

$$P_1^{II}(t+\Delta t) = P_2(t)\mu_1\Delta t + P_1^{II}(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu_2\Delta t) + P_o(t)(1-\alpha)\lambda\Delta t$$

Für $n=o$ ergibt sich:

$$P_o(t+\Delta t) = P_o(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1^I\mu_1\Delta t + P_1^{II}\mu_2\Delta t$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern und Weglassen von Größe, bei denen Δt als Faktor in einer höheren Potenz als Eins vorkommt, erhält man z.B. für $n>2$ nach einigen Umstellungen und Division durch Δt folgenden Ausdruck, wobei $\mu=\mu_1+\mu_2$:

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Für $\Delta t \to o$ steht auf der linken Seite der Differentialquotient $\frac{d}{dt} P_n(t)$. Da für den stationären Zustand die Wahrscheinlichkeiten $P_n(t)$ zeitunabhängig sind ($P_n(t)=P_n$), ist der Differentialquotient Null und man erhält folgende Differenzengleichung für $n>2$:

$$o = -(\lambda+\mu)P_n + \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1}$$

Für $n=2$: $o = -(\lambda+\mu)P_2 + \mu P_3 + \lambda(P_1^I+P_1^{II})$

$$n=1: \begin{cases} o = -(\lambda+\mu_1)P_1^I + \mu_2 P_2 + \alpha\lambda P_o \\ o = -(\lambda+\mu_2)P_1^{II} + \mu_1 P_2 + (1-\alpha)\lambda P_o \end{cases}$$

$$n=o: \; o = -\lambda P_o + \mu_1 P_1^I + \mu_2 P_1^{II}$$

Setzt man noch $P_1 = P_1^I + P_1^{II}$, erübrigt sich die zweite Gleichung und die erste gilt für $n \geq 2$. Die Lösung der ersten Gleichung ist nach der Theorie der Differenzengleichungen[1] sehr einfach. Dazu schreiben wir die Gleichung um:

$$P_{n+2} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} P_{n+1} + \frac{\lambda}{\mu} P_n = o$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$q^2 - \frac{\lambda+\mu}{\mu} q + \frac{\lambda}{\mu} = o$$

Sie hat die Lösungen $q_1=\frac{\lambda}{\mu}$ und $q_2=1$. Letztere scheidet aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen aus. Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet:

$$P_n = A\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \geq 2$$

Die Konstante A muß aus den übrigen Gleichungen, den Randbedingungen, berechnet werden:

---

1) Vgl. etwa Goldberg (1968).

Wir eliminieren aus den Gleichungen für n=1 die Größe P_2:

$$\frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2} P_1^I = P_2 + \alpha\frac{\lambda}{\mu_2} P_o$$

$$\frac{\lambda+\mu_2}{\mu_1} P_1^{II} = P_2 + (1-\alpha)\frac{\lambda}{\mu_1} P_o \quad \Big| -$$

$$(1) \quad \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2} P_1^I - \frac{\lambda+\mu_2}{\mu_1} P_1^{II} = \left[\frac{\alpha\lambda}{\mu_2} - \frac{(1-\alpha)\lambda}{\mu_1}\right] P_o$$

Aus dieser Gleichung und aus der für n=o kann man jetzt die Größen P_1^I und P_1^{II} bestimmen. Die Gleichung für n=o lautet:

$$\mu_1 P_1^I + \mu_2 P_1^{II} = \lambda P_o \quad \Big| \cdot \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_1\mu_2}$$

$$(2) \quad \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2} P_1^I + \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_1} P_1^{II} = \frac{\lambda(\lambda+\mu_1)}{\mu_1\mu_2} P_o$$

Gleichung (2) - Gleichung (1) ergibt:

$$\left[\frac{\lambda+\mu_1}{\mu_1} + \frac{\lambda+\mu_2}{\mu_1}\right] P_1^{II} = \left[\frac{\lambda(\lambda+\mu_1)}{\mu_1\mu_2} - \frac{\alpha\lambda}{\mu_2} - \frac{(1-\alpha)\lambda}{\mu_1}\right] P_o$$

$$\frac{2\lambda+\mu}{\mu_1} P_1^{II} = \frac{\lambda(\lambda+\mu_1)-\alpha\lambda\mu_1+(1-\alpha)\lambda\mu_2}{\mu_1\mu_2} P_o$$

$$P_1^{II} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu_1-\alpha\lambda\mu_1+(1-\alpha)\lambda\mu_2}{(2\lambda+\mu)\mu_2} P_o$$

$$= \frac{\lambda^2+(1-\alpha)\lambda\mu_1+(1-\alpha)\lambda\mu_2}{(2\lambda+\mu)\mu_2} P_o$$

$$= \frac{\lambda^2+(1-\alpha)\lambda\mu}{(2\lambda+\mu)\mu_2} P_o$$

$$P_1^{II} = \frac{\lambda+(1-\alpha)\mu}{2\lambda+\mu} \frac{\lambda}{\mu_2} P_o$$

Durch Einsetzen in (1) oder (2) ergibt sich für P_1^I:

$$P_1^I = \frac{\lambda+\alpha\mu}{2\lambda+\mu} \frac{\lambda}{\mu_1} P_o$$

Die Summe von P_1^I und P_1^{II} ergibt P_1:

$$P_1 = \frac{\lambda\mu}{\mu_1\mu_2} \frac{\lambda+(1-\alpha)\mu_1+\alpha\mu_2}{2\lambda+\mu} P_o$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu^2}{\mu_1\mu_2} \frac{\lambda+(1-\alpha)\mu_1+\alpha\mu_2}{2\lambda+\mu} P_o = \frac{\lambda}{\mu} BP_o = \kappa BP_o$$

Durch Einsetzen von P_1^I oder P_1^{II} in eine der Gleichungen für n=1 erhält man folgenden Ausdruck für P_2:

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \frac{\mu^2}{\mu_1\mu_2} \frac{\lambda+(1-\alpha)\mu_1+\alpha\mu_2}{2\lambda+\mu} P_o = (\frac{\lambda}{\mu})^2 BP_o = \kappa^2 BP_o$$

Man erkennt, daß das Produkt BP_o=A. Zur Bestimmung von P_o nutzen wir die Beziehung aus: $\sum_{n=o}^{\infty} P_n = 1.$

$$P_o = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1-BP_o \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = 1-BP_o(\frac{1}{1-\lambda/\mu}-1)$$

$$P_o = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(1-B)\lambda/\mu} = \frac{1-\kappa}{1-(1-B)\kappa}$$

Die mittlere Warteschlangenlänge ergibt sich aus folgender Formel:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = BP_o \sum_{n=1}^{\infty} n\kappa^n \quad \text{mit } \kappa = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

$$= BP_o\kappa \sum_{n=1}^{\infty} n\kappa^{n-1}$$

$$= BP_o\kappa \frac{d}{d\kappa} \sum_{n=o}^{\infty} \kappa^n$$

$$= BP_o\kappa \frac{d}{d\kappa} \frac{1}{1-\kappa}$$

$$= \frac{BP_o\kappa}{(1-\kappa)^2} = \frac{P_1}{(1-\kappa)^2}$$ [1]

1) Die von Kaufmann u. Cruon (1961), S.7o angegebene Formel für L müßte noch durch 1-κ dividiert werden.

$$L_S = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)P_n = \sum_{n=3}^{\infty} nP_n - 2 \sum_{n=3}^{\infty} P_n$$

$$= L - 2P_2 - P_1 - 2(1-P_0-P_1-P_2)$$

$$= L + 2P_0 + P_1 - 2 \quad ^{1)}$$

Es sei bemerkt, daß der Fall $\mu_1=\mu_2$ und $\alpha=0{,}5$ dem klassischen M/M/2-System mit zwei gleichen Abfertigungsstellen entspricht.

3.2.3 Das System $M/E_k/1$

Die Abfertigungszeiten gehorchen einer Erlang-Verteilung mit k Freiheitsgraden. Man kann sich eine solche Abfertigungsstelle zusammengesetzt vorstellen aus k hintereinander geschalteten exponentiellen Kanälen, die alle die Abfertigungsrate $k\mu$ haben, allerdings mit folgender Einschränkung: In der Abfertigungsstelle befindet sich immer nur ein Kunde. Dieser Kunde muß jeden der k Kanäle mit der mittleren Geschwindigkeit $k\mu$ durchlaufen. Der Kunde verläßt das System, sobald der letzte Kanal seine Bedienung beendet hat. Erst jetzt kann ein neuer Kunde zur Abfertigung zugelassen werden.

Benutzt man die Formel von Pollaczek-Khintchine[2] zur Bestimmung der mittleren Warteschlangenlänge, erhält man folgenden Ausdruck:

$$L = \frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{2k-\kappa(k-1)}{2k} \qquad (*)$$

$$L_S = L - \kappa.$$

Das betrachtete System ist für k=1 mit dem System M/M/1 identisch.

---

1) Man kann L_S auch nach der Formel $L_S=L\kappa^2$ berechnen. Denn
$L_S = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)P_n = BP_0 \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)\kappa^n = BP_0\kappa^3 \frac{d}{d\kappa} \sum_{n=2}^{\infty} \kappa^{n-2} = \frac{BP_0\kappa^3}{(1-\kappa)^2}$

2) Vgl. Saaty (1961), S.42. Die von Saaty auf Seite 166 angegebene Formel ist falsch.

Man sieht leicht, daß der Faktor $[2k-\kappa(k-1)]/2k$ für $k>1$ immer kleiner als Eins ist. Somit ist die mittlere Warteschlangenlänge dieses Systems für $k>1$ immer kleiner als die des exponentiellen Kanals bei gleicher durchschnittlicher Ankunfts- und Abfertigungsrate. Man kann das so deuten, daß im Falle erlangverteilter Abfertigungszeiten die Bedienung regelmäßiger erfolgt als im exponentiellen Fall. Das erkennt man auch an der Varianz der Erlang-Verteilung: $1/k\mu^2$. Je größer k, umso kleiner ist die Varianz. Für $k=\infty$ ist die Varianz Null. Das ist der Fall der konstanten Bedienungszeit. Jeder Kunde hat die gleiche Abfertigungszeit $1/\mu$. Für dieses System verwendet man auch die Symbolik M/D/1. Die mittlere Warteschlangenlänge dieses Systems beträgt:

$$L = \frac{\kappa}{1-\kappa}\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)$$

Man erhält diese Formel, wenn man bei dem Ausdruck (*) den Grenzübergang $k\to\infty$ vornimmt.

Es sei bemerkt, daß die Wahrscheinlichkeit P_0 für das Leerstehen der Station bei allen Systemen M/G/1 gleich ist:

$$P_0 = 1 - \kappa \quad ^{1)}$$

Sie hängt also bei Wartesystemen mit Poisson-Ankünften und einer einzigen Abfertigungsstelle nicht von der Art der Bedienungszeitverteilung ab. Da somit κ bei vielen Wartesystemen die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Station besetzt ist, hat man es Kapazitätsausnutzung genannt.

3.2.4 Das System $M/H_2/1$

Bei diesem System gehorchen die Abfertigungszeiten einer Hyperexponentialverteilung vom Typ 2. Eine Abfertigungsstelle mit dieser Eigenschaft kann man sich vorstellen als eine Abfertigungsstation mit zwei unabhängigen, parallelen exponentiellen Kanälen, die nach folgendem Prinzip arbeitet: Es darf gleichzeitig nicht mehr als ein Kunde abgefertigt werden. Kanal I arbeitet mit der mittleren Abfertigungsrate $2\alpha\mu$, Kanal II mit

---

1) Vgl. etwa Morse (1958), S. 73 f.

der Rate $2(1-\alpha)\mu$. Die eintreffenden Kunden wählen mit Wahrscheinlichkeit α Kanal I und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ Kanal II zu ihrer Abfertigung aus. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $o<\alpha\leq o,5$ setzen. Hat ein Kunde seine Abfertigung beendet, sind beide Kanäle leer und der nächste Kunde kann zur Abfertigung zugelassen werden, wobei dieser mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten entweder von Kanal I oder Kanal II bedient wird.

Im Grunde handelt es sich also um einen einzigen Kanal, der von Kunde zu Kunde zufällig mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten seine Abfertigungsrate ändern kann, und zwar schlägt er mit Wahrscheinlichkeit α die langsame Gangart $2\alpha\mu$, mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ die schnellere Gangart $2(1-\alpha)\mu$ ein.

Nach der Formel von Pollaczek-Khintchine ergibt sich folgender Ausdruck für die mittlere Warteschlangenlänge:

$$L = \frac{\kappa}{1-\kappa}\ \frac{\kappa+(1-\kappa)4\alpha(1-\alpha)}{4\alpha(1-\alpha)}$$

$$L_S = L - \kappa.$$

Für $\alpha=o,5$ ist $L = \kappa/(1-\kappa)$. In diesem Fall ist die hypergeometrische Verteilung mit der Exponentialverteilung identisch. Man kann sehr schnell zeigen, daß für $\alpha<o,5$ der zweite Faktor von L immer größer als Eins ist. Die Varianz der hyperexponentiellen Verteilung beträgt h/μ^2 [1], wobei $h\to\infty$, wenn $\alpha\to o$, d.h. mit immer kleiner werdenden α wird die Varianz immer größer. Auch die zugehörige Warteschlange wird immer länger.

Auch bei diesem System ist, wie bereits allgemein festgestellt wurde, die Wahrscheinlichkeit P_o, daß die Station leer ist, $1-\kappa$.

Wir wollen festhalten, daß die Varianzen der Erlang-Verteilungen je nach Wahl von k von o bis $1/\mu$ variieren, die Varianzen der hyperexponentiellen Verteilungen je nach der Größe von h bzw. α von $1/\mu$ bis ∞ variieren. Schon aus diesem Grund sind diese Verteilungen zur Approximation empirischer Verteilungen besonders gut geeignet.

---

1) Vgl. Punkt (e) im Abschnitt 1.2.3.

3.2.5 Das System M/G/1

Normalerweise versteht man darunter ein System mit Poisson-Ankünften und einer nicht näher spezifizierten Abfertigungszeitverteilung. Wir wollen jedoch die Verteilung der Abfertigungszeiten nicht offen lassen, sondern unter dem Symbol G eine empirische gewonnene Wahrscheinlichkeitsverteilung verstehen, die man durch Untersuchung einer konkreten Abfertigungsstation erhalten hat. Man hat sich das so vorzustellen, daß während eines möglichst langen Beobachtungszeitraums die Abfertigungszeiten aller an dieser Station ankommenden Kunden gemessen und notiert werden. Die Station arbeite nach der Regel "first come - first served". Die gewonnenen Zeiten werden in einer gruppierten Häufigkeitsverteilung zusammengefaßt. Durch Kumulation gewinnt man dann die entsprechende Verteilungsfunktion. Den Mittelwert dieser Verteilung kann man errechnen. Er entspricht der mittleren Abfertigungszeit. In vielen Fällen wird man diese empirische Verteilung etwa durch eine Erlang-Verteilung approximieren. Wir wollen jedoch dieses Wartesystem mit der empirischen Verteilung simulieren. Der theoretische Wert für die mittlere Warteschlangenlänge ist somit unbekannt. Wir wissen jedoch, daß die Wahrscheinlichkeit P_0, daß die Station unbesetzt ist $1-\kappa$ beträgt. Die Größe κ wird errechnet aus dem Produkt von λ und der mittleren Abfertigungszeit. Denn der reziproke Wert der mittleren Abfertigungszeit ist die mittlere Abfertigungsrate.

3.3 Die rechnerische Durchführung der Simulation

3.3.1 Die Simulationsmethode

Der Zustand eines Wartesystems zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 ist die Zahl aller Kunden im System, also einschließlich der in der Abfertigung befindlichen. Wir wollen diese Zahl mit $L(t_0)$ bezeichnen. Die Warteschlange L(t) ist ein sich im Zeitablauf entwickelnder stochastischer Prozeß, dessen Zustände von den beiden Prozessen Ankunft und Abfertigung determiniert

werden. Verfolgt man die Entwicklung einer Warteschlange während eines gewissen Zeitraums, so erkennt man, daß sich die Änderungen des Zustands des Systems in der kontinuierlich ablaufenden Zeit sprunghaft vollziehen. Die Ankunft eines Kunden zu einem bestimmten Zeitpunkt erhöht den Zustand des Systems um Eins, eine Abfertigung vermindert den Zustand um Eins. Wir wollen die Zustandsänderungen des Systems Ereignisse nennen, die in ihrer zeitlichen Abfolge einen Ereignisstrom[1)] bilden. Dieser Ereignisstrom ist auf rechnerischem Wege mittels eines Computers nachzuvollziehen.

Bekanntlich kann man mit einer Rechneanlage nur eine digitale Simulation durchführen, d.h. es können prinzipiell nur Prozesse mit diskretem Zeitparameter simuliert werden. Kontinuierliche Zeitparameter muß man gegebenenfalls diskretisieren, indem man die Zeit in mehr oder minder kleinere Zeiteinheiten (Perioden) einteilt. Für digitale Rechenanlagen sind spezielle problemorientierte Sprachen entwickelt worden, die die Durchführung einer Simulation wesentlich erleichtern können, die sogenannten Simulationssprachen.[2)] Einige dieser Sprachen sind speziell auf Wartesysteme zugeschnitten. Alle Simulationssprachen arbeiten mit einer periodisierten Zeit, die durch einen Zeitkontrollmechanismus, die sogenannte Simulationsuhr, gesteuert wird. Jedoch wird unterschieden zwischen einer periodenorientierten und einer ereignisorientierten Simulation. Im ersten Fall wird die Simulationsuhr immer um eine gleichlange Periode vorgedreht. Die während einer Periode auftretenden Ereignisse werden dem Anfang bzw. dem Ende einer Periode zugeordnet, so daß sich Zustandsänderungen des Systems nur am Anfang bzw. Ende einer solchen Periode einstellen können. Bei einer ereignisorientierten Simulation wird die Simulationsuhr um eine gewisse Anzahl von Zeiteinheiten immer bis zum nächsten Ereignis vorgedreht. Der Einsatz einer geeigneten Simulationssprache in der vorliegenden Arbeit scheiterte an der fehlenden

---

1) Köcher u.a. (1972), S. 54.

2) Vgl. hierzu Köcher u.a. (1972), Kapitel VI.

Implementation solcher Systeme auf den benutzten Rechenanlagen. Das verwendete Simulationsprogramm wurde in der Programmiersprache Algol abgefaßt.

Obwohl der Zeitparameter bei den betrachteten Wartesystemen eine kontinuierliche Variable ist, läßt sich der Prozeß ohne besondere Vorkehrungen simulieren, da die Änderungen der Zustandsvariablen sprunghaft sind, d.h. zu diskreten Zeitpunkten erfolgen. Es läßt sich also eine exakte Nachbildung des Ereignisstromes vornehmen: eine ereignisorientierte Simulation. Ausgehend von einem Anfangszustand zu Beginn der Simulation wird der Zeitpunkt des Eintretens des nächstfolgenden Ereignisses errechnet. Kurz nach Eintreten des Ereignisses liegt der neue Zustand des Systems fest und bleibt solange konstant, bis das nächste Ereignis eingetreten ist. Die Bestimmung des jeweils nächstfolgenden Ereigniszeitpunktes geschieht nach den Modellvorschriften in Abhängigkeit früherer Zustandsänderungen und unter Einsatz eines Zufallsgenerators. Im Grunde genommen läuft das geschilderte Verfahren darauf hinaus, die Geschichte eines jeden Kunden vom Zeitpunkt seines Eintritts in das System ab bis zu seinem Austritt zu verfolgen.

Für die im vorigen Abschnitt beschriebenen Wartesysteme wird die Vorgehensweise eingehend beschrieben.

Zunächst sind die Zwischenankunftszeiten TA und die Abfertigungszeiten TB der einzelnen Kunden nach den vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erzeugen. Dazu werden die in Abschnitt 1.2.3 entwickelten Methoden benutzt. Zur Berechnung der Zwischenankunftszeit eines Kunden wird jedesmal der Zufallsgenerator aufgerufen, der eine gleichförmig verteilte Zufallszahl z erzeugt. Da wir es nur mit Poisson-Ankünften zu tun haben, berechnet sich die Zwischenankunftszeit des i-ten Kunden wie folgt:

$$TA(i) = \frac{1}{\lambda} |\ln z|$$

Die Ankunftszeit des i-ten Kunden gewinnt man durch aufsummieren aller TA(i):

$$ANK(i) = \sum_{j=1}^{i} TA(j) = ANK(i-1) + TA(i)$$

Um die Bedienungszeit des i-ten Kunden anzugeben, benötigt man eine Zufallszahl zb(i), deren Wahrscheinlichkeitsverteilung der der Bedienungszeiten entspricht. Das leisten die in Abschnitt 1.2.3 beschriebenen Methoden. Für die Bedienungszeit ergibt sich:

$$TB(i) = zb(i)$$

Der Zeitpunkt der Beendigung der Abfertigung des i-ten Kunden berechnet sich nach folgender Formel:

$$ABF(i) = MAX[ANK(i), ABF(i-1)] + TB(i)$$

Für eine beliebig vorgegebene Anzahl N von Kunden lassen sich also deren Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte rekursiv bestimmen. Diese Zeiten werden nach ihrer Berechnung in eine Ankunftsliste und eine Abfertigungsliste weggespeichert. Einem möglichen Listenüberlauf ist dabei Rechnung zu tragen.

Die mittlere Schlangenlänge L wird folgendermaßen geschätzt[1]:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \int_0^T L(t)dt = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{\tilde{N}-1} L(t_j)(t_{j+1}-t_j)$$

Dabei ist T die gesamte Simulationsdauer und t_j der Zeitpunkt eines Ereignisses: Ankunfts- oder Abfertigungszeitpunkt. Diese t_j, $j=1,2,\ldots,\tilde{N}$, bilden eine monoton ansteigende Folge und charakterisieren den Ereignisstrom. Der Graph $(t_j, L(t_j))$ gibt ein anschauliches Bild über die Entwicklung der Warteschlange.

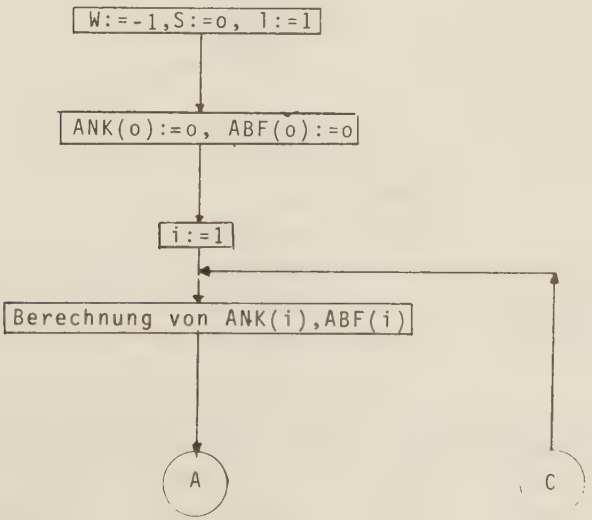
Es stellt sich jetzt das programmiertechnische Problem, die auf den Listen abgespeicherten Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte in einer monoton ansteigenden Folge anzuordnen, die dann der Folge der t_j entspricht. Außerdem ist zu jedem t_j das entsprechende $L(t_j)$ festzustellen, um die in der Formel für $\hat{L}$ benötigten Produkte bilden zu können. Diese sind dann

---

1) Vgl. Köcher u.a. (1972), S. 37

noch sukzessive aufzuaddieren. Wie diese Probleme programmiertechnisch gelöst wurden, wird nun detailliert beschrieben und durch ein Flußdiagramm (Abb. 3) dargestellt.

Das Programm errechnet die Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte für N+H Kunden sukzessive gemäß den oben angegebenen Rekursionsformeln. Die Rollen von N und H werden in Abschnitt 4.2 erläutert. Die Ankunfts- sowie die Abfertigungszeitpunkte bilden zwei monoton ansteigende Folgen, wobei natürlich immer ANK(i)<ABF(i), i=1,2,...,N+H. Nach jedem berechneten Paar [ANK(i),ABF(i)] teilt ein Ordnungsalgorithmus dem Zeitpunkt ANK(i) den ihm zustehenden Platz in der Folge der bisher berechneten Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte zu. Der Zeitpunkt ABF(i) nimmt automatisch den letzten Platz in der Folge ein, denn er ist der augenblicklich größte Wert. Hat der Algorithmus den Zeitpunkt ANK(i) eingeordnet, kann die Produktsumme in der Formel für $\hat{L}$ bis zu diesem Zeitpunkt errechnet werden, da keine der noch zu berechnenden Ankunfts- oder Abfertigungszeitpunkte der nächsten Kunden wegen der Monotonie der Folgen unterhalb von ANK(i) liegen wird.



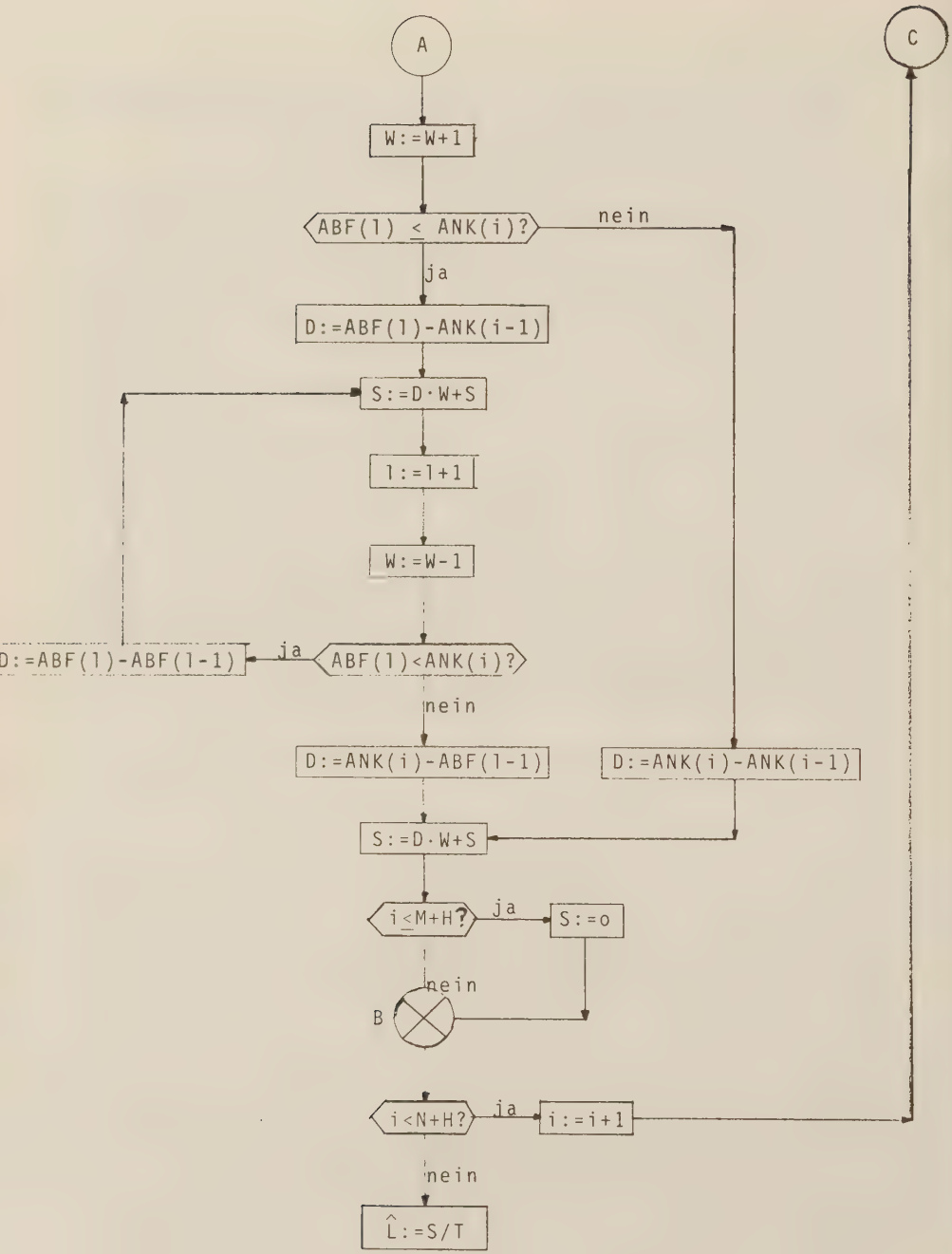

A
C
W:=W+1
ABF(l) ≤ ANK(i)?
nein
ja
D:=ABF(l)-ANK(i-1)
S:=D·W+S
l:=l+1
W:=W-1
D:=ABF(l)-ABF(l-1)
ja
ABF(l)<ANK(i)?
nein
D:=ANK(i)-ABF(l-1)
D:=ANK(i)-ANK(i-1)
S:=D·W+S
i≤M+H?
ja
S:=o
nein
B
i<N+H?
ja
i:=i+1
nein
L̂:=S/T

Abb. 4

Zur Berechnung der Produktsumme benötigt man die $L(t_j)$, die in dem Flußdiagramm mit dem Symbol W belegt werden, sowie die Differenzen $t_{j+1}-t_j$, die mit D bezeichnet werden. Das Programm stellt die Werte von W und D folgendermaßen fest. Nach jeder Berechnung von ANK(i) und ABF(i) fragt man ab, wieviele der Abfertigungszeitpunkte ABF(l) vor ANK(i) liegen. Die Zählgröße l wird vor Eintreffen des ersten Kunden auf Eins gesetzt und wächst von Kunde zu Kunde. Liegt z.B. kein Abfertigungszeitpunkt ABF(l) vor ANK(i), war das letzte Ereignis die Ankunft des (i-1)-ten Kunden zum Zeitpunkt ANK(i-1) und die Warteschlange W muß um Eins erhöht werden. Liegen Abfertigungszeitpunkte dazwischen, muß die Warteschlange entsprechend erniedrigt werden, wie das Flußdiagramm es beschreibt. Die Größe S, die fortlaufend errechnet wird, entspricht dabei der Produktsumme bis zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Zählgröße l erhöht sich immer bis zur Nummer desjenigen Abfertigungszeitpunktes, der oberhalb von ANK(i) liegt. Hat man nun das nächste Wertepaar [ANK(i+1),ABF(i+1)] berechnet, fragt man als erstes wiederum ab, ob dieser Zeitpunkt ABF(l) vor ANK(i+1) liegt. Ist das nicht der Fall, war das letzte Ereignis vor ANK(i+1) der Zeitpunkt ANK(i) und die Warteschlange W ist um Eins zu erhöhen. Andernfalls ist zu prüfen, ob noch andere, auf ABF(l) folgende Abfertigungszeitpunkte ABF(l+1), ABF(l+2) u.s.w. ebenfalls vor ANK(i+1) liegen. Dementsprechend ist die Größe W zu erniedrigen. Der neue Wert von S ergibt sich jeweils aus dem alten plus dem Produkt aus dem aktuellen Wert von W und dem zugehörigen Zeitintervall D.

Der Algorithmus, der die Einordnung von ANK(i) vornimmt und der die Produktsumme bis zum Zeitpunkt ANK(i) fortschreibt, ist als Funktionsprozedur (Unterprogramm) programmiert und besitzt den Namen WART. Dieses Unterprogramm beginnt in dem Flußdiagramm an der Stelle A (Zeichen o) und endet an der Stelle B (Zeichen ⊗). Die Abfrage "$i \leq M+H$?" innerhalb von WART bedarf noch einer Erläuterung. Das wird im nächsten Abschnitt geschehen.

Die Simulation wird abgebrochen bei Ankunft des (N+H)-ten Kunden, also zum Zeitpunkt $t_{\tilde{N}}$=ANK(N+H). Dadurch wird die Simulationsdauer T festgelegt. Es läßt sich somit nicht vermeiden, daß man einige Abfertigungszeiten, die größer als ANK(N+H) sind, zuviel

Falls man gezwungen ist, Kernspeicherplatz zu sparen, etwa wegen eines Listenüberlaufs, braucht man sich nur zu erinnern, daß man nach der Fortschreibung der Produktsumme S bis zum Zeitpunkt ANK(i) alle voranliegenden Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte nicht mehr benötigt. Diese unnütz belegten Plätze kann man zur Speicherung neu hinzukommender Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte verwenden. Man kommt dann u.U. mit relativ wenig Kernspeicherbedarf aus. Diese Vorgehensweise ist vor allem dann zu empfehlen, wenn man die Größe N offen läßt und den Abbruch der Simulation anderen Kriterien überlassen will.

Das Flußdiagramm (Abb. 4) beschreibt einen einzigen Simulationslauf und liefert die Schätzung $\hat{L}$. Mit der einen Schätzung wird man sich natürlich nicht zufrieden geben, sondern den Simulationslauf n-mal wiederholen. Aus den Werten $\hat{L}_1,\ldots,\hat{L}_n$ wird durch arithmetische Mittelung der eigentliche Schätzwert für L gewonnen.

Die Simulation des Systems M/M/2 unter der angegebenen Schlangendisziplin gestaltet sich sehr viel komplizierter. Für jeden Kunden benötigt man nämlich die Information, durch welchen Kanal der Kunde abgefertigt wird, um den richtigen Abfertigungszeitpunkt zu berechnen. Dazu müßte man prinzipiell für jeden der beiden Kanäle eine Marke definieren, die angibt, ob der Kanal frei oder besetzt ist. Man könnte z.B. einen Zähler verwenden, der den Wert Null annimmt, wenn der entsprechende Kanal frei ist, und den Wert Eins, wenn er besetzt ist. Anstatt Null und Eins kann man natürlich jedes andere Zahlenpaar auswählen. Oder man definiert sich eine geeignete Boole'sche Variable.

Wir wollen dieses Problem etwas anders bewältigen, indem wir die beiden Vorzeichen "+" und "-" zur Charakterisierung der Abfertigungszeitpunkte aus Kanal 1 oder 2 einsetzen. Wir werden nämlich die Abfertigungszeitpunkte derjenigen Kunden, die durch Kanal 2 abgefertigt wurden, mit einem negativen Vorzei-

chen versehen. Bei der Berechnung der Produktsumme wird mit den Absolutbeträgen der Abfertigungszeitpunkte gearbeitet.

Ein weiteres Problem, das es zu bewältigen gilt, besteht darin, daß die Abfertigungszeitpunkte (Absolutbeträge) nicht von vornherein eine monoton ansteigende Folge bilden. So kann der Abfertigungszeitpunkt des i-ten Kunden durchaus vor dem Abfertigungszeitpunkt des (i-1)-ten Kunden liegen. Somit ist man gezwungen, die Abfertigungszeitpunkte noch der Größe nach zu ordnen, bevor man das Unterprogramm WART zur sukzessiven Berechnung der Produktsumme und damit der Warteschlangenlänge aufrufen kann.

Das Flußdiagramm auf Seite 6o beschreibt die Berechnung des Abfertigungszeitpunktes des i-ten Kunden. Die Größe ZAEHLER nimmt den Wert Null an, wenn beide Kanäle besetzt sind. Sonst hat sie den Wert Eins.

Für jedes i, also für jeden Kunden, wird der Zufallsgenerator ZG mindestens zweimal aufgerufen, wobei er die Zufallszahlen za, zb und nach Bedarf zc erzeugt. Mit Hilfe von za wird die Ankunftszeit und mit Hilfe von zb der Abfertigungszeitpunkt bestimmt. Die Zufallszahl zc wird nur benötigt, wenn beide Kanäle unbesetzt sind. In diesem Fall wird ein ankommender Kunde sich mit einer bestimmten, vorgegebenen Wahrscheinlichkeit für einen der beiden Kanäle entscheiden. Dazu wird mit Hilfe von zc ein einfaches Bernoulli-Experiment realisiert, wobei man die Wahl von Kanal 1 als Erfolg und die Wahl von Kanal 2 als Mißerfolg auffassen kann oder umgekehrt.

Kanal 1 arbeite mit Rate MY1, Kanal 2 mit Rate MY2. Ist die Station leer, wählt ein ankommender Kunde mit Wahrscheinlichkeit α Kanal 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ Kanal 2 zu seiner Abfertigung aus.

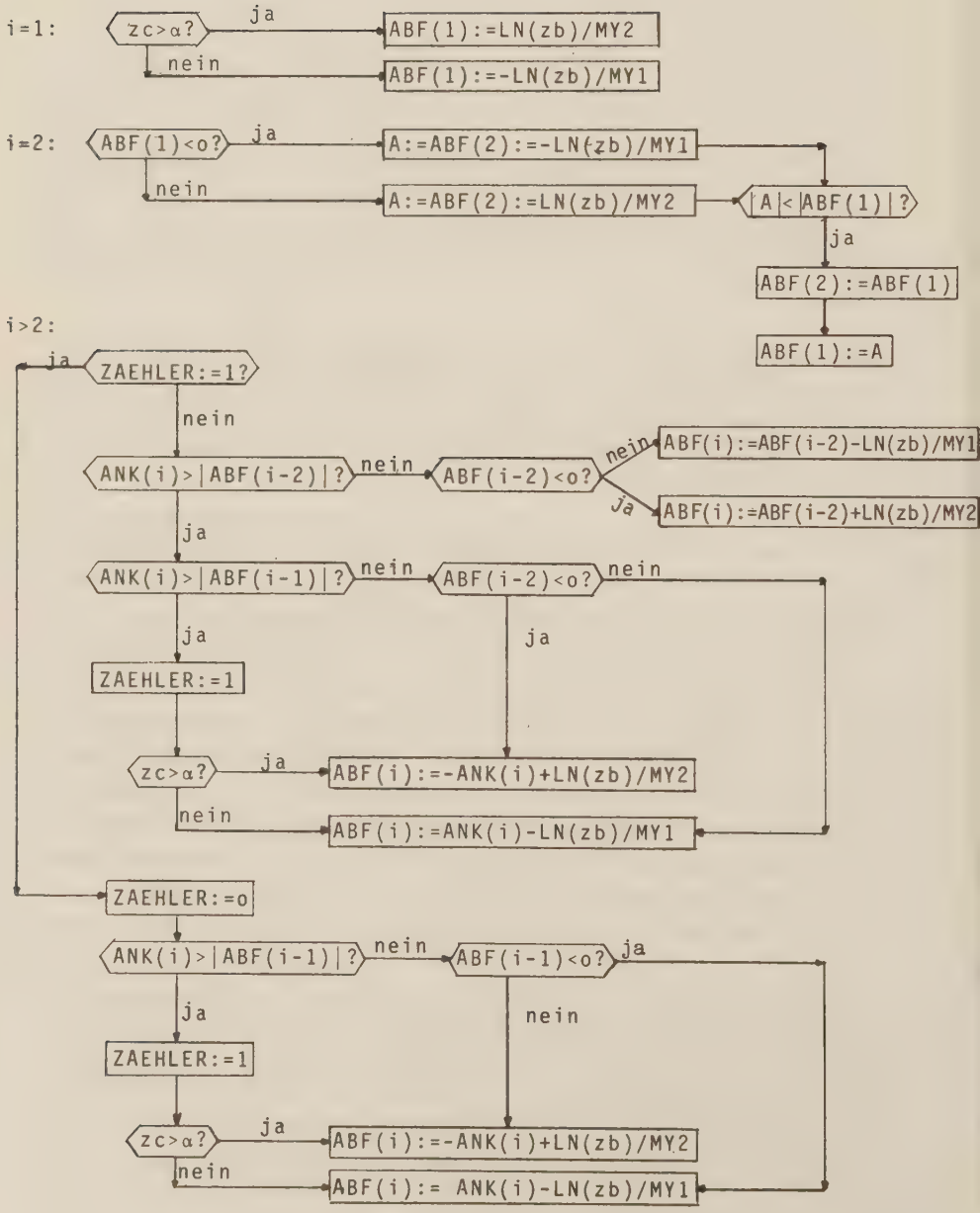
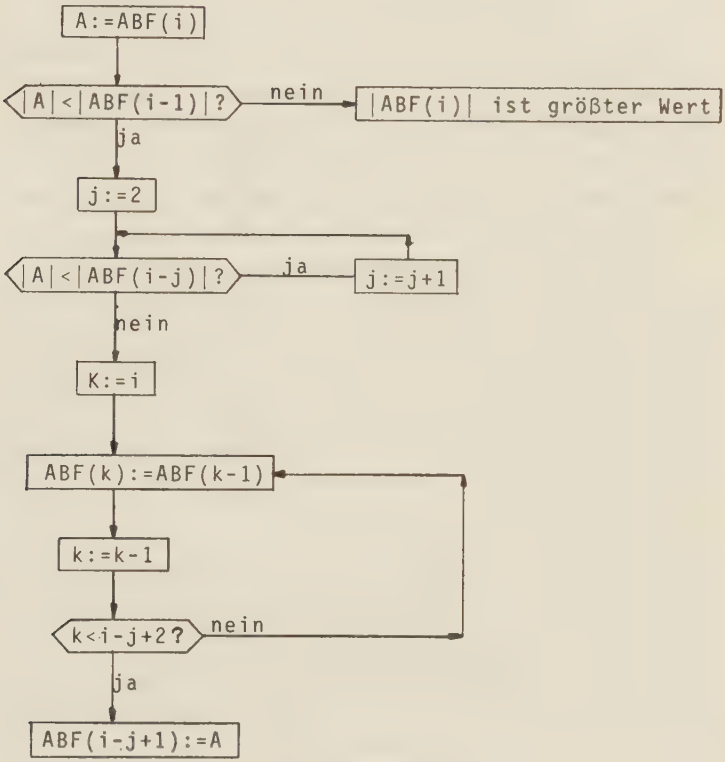

i=1:
zc>α?
ja
nein
ABF(1):=LN(zb)/MY2
ABF(1):=-LN(zb)/MY1
i=2:
ABF(1)<o?
ja
nein
A:=ABF(2):=-LN(zb)/MY1
A:=ABF(2):=LN(zb)/MY2
|A|<|ABF(1)|?
ja
ABF(2):=ABF(1)
ABF(1):=A
i>2:
ja
ZAEHLER:=1?
nein
ANK(i)>|ABF(i-2)|?
nein
ABF(i-2)<o?
nein
ABF(i):=ABF(i-2)-LN(zb)/MY1
ja
ABF(i):=ABF(i-2)+LN(zb)/MY2
ja
ANK(i)>|ABF(i-1)|?
nein
ABF(i-2)<o?
nein
ja
ja
ZAEHLER:=1
zc>α?
ja
ABF(i):=-ANK(i)+LN(zb)/MY2
nein
ABF(i):=ANK(i)-LN(zb)/MY1
ZAEHLER:=o
ANK(i)>|ABF(i-1)|?
nein
ABF(i-1)<o?
ja
ja
nein
ZAEHLER:=1
zc>α?
ja
ABF(i):=-ANK(i)+LN(zb)/MY2
nein
ABF(i):= ANK(i)-LN(zb)/MY1

Abb. 5

Der Abfertigungszeitpunkt ABF(i) muß jetzt noch in die Folge der bisher berechneten Abfertigungszeitpunkte gemäß seiner absoluten Größe eingeordnet werden:



Ein Wert ABF(j) mit j<i aus der Reihe der nach der absoluten Größe geordneten Abfertigungszeitpunkte wird somit nicht immer den Abfertigungszeitpunkt des j-ten Kunden repräsentieren. Das ist jedoch für die Berechnung der Warteschlange ohne Belang. Wichtig ist nur die Eigenschaft des Zeitpunktes, nämlich das Ereignis Abfertigung.

Es sei bemerkt, daß sich die Simulation dieses Wartesystems, die sich in einer herkömmlichen Programmiersprache - in dieser Studie wurde die Programmiersprache ALGOL benutzt - relativ kompliziert gestaltet, unter Verwendung einer geeigneten Simulationssprache sicherlich sehr viel einfacher und bequemer durchführen ließe.

3.3.2 Das Problem des Erreichens der stationären Phase

Die in der vorliegenden Schrift beschriebenen Wartesysteme sind stochastische Prozesse, die die Eigenschaft der Stationarität besitzen. Ein stochastischer Prozeß X(t) wird stationär genannt, wenn die Verteilung der n-dimensionalen Zufallsvariablen $[X(t_1),\ldots,X(t_n)]$ gleich ist der Verteilung der Zufallsvariablen $[X(t_1+\tau),\ldots,X(t_n+\tau)]$, wobei n eine natürliche Zahl ist und die Werte $t_1,\ldots,t_n$ und τ aus dem Definitionsbereich des Prozessparameters t stammen müssen. Bei einem stationären stochastischen Prozeß hängt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prozeßvariablen X(t) nicht mehr von t ab. Insbesondere sind auch die Autokorrelationskoeffizienten sowie Erwartungswert und Varianz von X(t) von der Zeit t unabhängig. Außerdem ist in der stationären Phase eines stochastischen Prozesses der Einfluß des Anfangszustandes des Prozesses nicht mehr vorhanden. Wir sagen auch, daß in der stationären Phase sich das System in einem Gleichgewichtszustand befinde.

Die betrachteten Wartesysteme konvergieren alle gegen einen stationären Prozeß, sofern die mittlere Ankunftsrate λ kleiner als die mittlere Abfertigungsrate μ ist. Die Kapazitätsauslastung κ muß also immer kleiner als Eins sein. Der Gleichgewichtszustand stellt sich also nur dann ein, wenn die Kunden im Durchschnitt schneller abgefertigt werden als sie ankommen.

Nun stellt sich die Frage, wie lange ein Prozeß laufen muß, bis sich der stationäre Zustand einstellt. Dazu ist zuerst einmal zu bemerken, daß theoretisch dieser Gleichgewichtszustand nie erreicht wird, bzw. daß er sich erst nach einer unendlich langen Zeit einstellt. Es existiert also kein endlicher Zeitpunkt, von dem ab man sagen könnte, der Prozeß sei stationär und somit unabhängig von der Zeit t und dem Anfangszustand. Für den Praktiker ergibt sich daraus die Konsequenz, daß er eigentlich immer nur einen sogenannten quasistationären Zustand des Prozesses beobachten kann, einen Zustand, der der stationären Phase des interessierenden Prozesses hinreichend nahe kommt. Es liegt in der Natur der Sache, daß der Zeitpunkt, von dem ab ein Prozeß als quasistationär angesehen werden kann,

trotz einiger vorhandener mathematischer Kriterien, die sich meist auf das Konvergenzverhalten des Systems beziehen, reine Ermessensfrage bleiben muß. Je näher man an die eigentliche stationäre Phase herankommen will, umso länger muß man die Anlaufsphase des Prozesses gestalten. Es sei jedoch bemerkt, daß man manchmal in der Lage ist, mittels einer Monte-Carlo-Simulation direkt die stationäre Phase eines stochastischen Prozesses zu erzeugen, ohne eine längere Anlaufsphase in Kauf nehmen zu müssen. Darauf werden wir im Verlauf dieses Abschnittes noch zurückkommen.

Im folgenden werden einige empirische und mathematische Kriterien beschrieben, die sich auf das Erreichen der stationären Phase von Wartesystemen beziehen. Wenn dabei vom Erreichen der stationären Phase gesprochen wird, so wird darunter eine optimale Anpassung an die eigentliche stationäre Phase verstanden.

Conway (1964) hat eine einfache empirische Regel aufgestellt, die auf alle stochastischen Prozesse mit einer stationären Phase anwendbar ist. Man erzeugt sich eine lange Folge von Realisationen des Prozesses. Beginnend mit dem ersten Folgeglied streicht man sukzessive die Folgeglieder weg, die ein Maximum oder ein Minimum der Restfolge darstellen. Trifft man auf ein Element der Folge, das weder Maximum noch Minimum der nachfolgenden Glieder ist, gilt die stationäre Phase als erreicht. Nach diesem Vorgehen wird eine gewisse Anfangsperiode ausgeschlossen, bevor die eigentliche Beobachtungsperiode einsetzt. Die Länge der auszuschließenden Anfangsperiode hängt wesentlich von der Wahl geeigneter Anfangsbedingungen ab. Damit die Anlaufsphase möglichst kurz ist, schlägt Conway als "vernünftige" Anfangsbedingung denjenigen Zustand des Systems vor, der die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Eine andere empirische Regel hat Tocher (1963)[1)] beschrieben. Er ist der Meinung, daß die Anlaufsphase mindestens drei oder viermal so lang sein sollte wie der längste Zyklus des Pro-

---

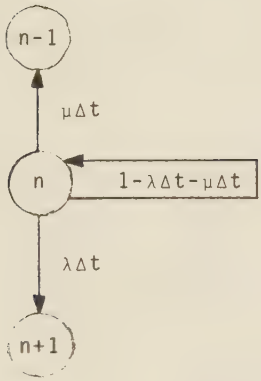
1) Vgl. Tocher (1963), S. 176

zesses. Ein Warteprozess besteht aus vielen ineinandergreifenden Zyklen. Ein Zyklus vom Typ n gilt als abgeschlossen, wenn das System, ausgehend von einem Zustand n, zum ersten Mal wieder den Zustand n erreicht. Eine wesentliche Schwierigkeit dieses Vorgehens ist die Feststellung des längsten Zyklus. Daraus resultiert ein weiterer Nachteil, den auch das Verfahren von Conway aufweist, daß die gesamte Folge der Realisationen des Prozesses erst einmal erzeugt und weggespeichert werden muß. Man hat also keine Möglichkeit, Speicherplatz zu sparen und riskiert bei langen Simulationen einen Listenüberlauf.

Einen interessanten Vorschlag hat Jackson (1961) für das System M/M/1 gemacht. Es sei A_n der Erwartungswert der Zeit, die das System benötigt, startend im Zustand 0, zum ersten Mal Zustand n zu erreichen. B_n sei der Erwartungswert der Zeit, die das System benötigt, startend im Zustand n zum ersten Mal Zustand 0 zu erreichen. Die Summe

$$C_n = A_n + B_n$$

ist dann der Erwartungswert der Zeit, die das System benötigt, startend im Zustand 0 zum ersten Mal Zustand n zu erreichen und wiederum in den Zustand 0 zurückzukehren. Zur Herleitung von A_n und B_n nutzt man die Markov-Eigenschaft des Systems M/M/1 aus, daß nämlich nur Übergänge in benachbarte Zustände möglich sind, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als eine Ankunft bzw. Abfertigung in einem beliebig kleinen Zeitraum Δt stattfindet, ist eine Größe höheren als ersten Grades in Δt und kann vernachlässigt werden. Wir nehmen an, das System befände sich im Zustand n. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Einheit in Δt ankommt, ist $\lambda\Delta t$ (Übergang des Systems vom Zustand n in Zustand n+1). Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Einheit in Δt abgefertigt wird, beträgt $\mu\Delta t$ (Übergang des Systems vom Zustand n in Zustand n-1). Die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Zustand des Systems nach einer Zeitspanne Δt nicht geändert hat, beträgt $1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$. Für den Zustand n ergibt sich folgender Wahrscheinlichkeitsgraph für die Übergangswahrscheinlichkeiten:



Wir wollen zuerst B_n herleiten. Befindet sich das System im Zustand n, so benötigt es aufgrund dieses Übergangsverhaltens nach einer Zeitspanne Δt mit Wahrscheinlichkeit $\mu\Delta t$ im Durchschnitt noch B_{n-1} Zeiteinheiten, mit Wahrscheinlichkeit $1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t$ im Durchschnitt noch B_n und mit Wahrscheinlichkeit $\lambda\Delta t$ im Durchschnitt noch B_{n+1} Zeiteinheiten, bis es den Zustand 0 erreicht hat.

$$B_n = \Delta t + \mu\Delta t\, B_{n-1} + (1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)\, B_n + \lambda\Delta t\, B_{n+1}$$

Nach Auflösen der Klammer, Ordnen und Division durch Δt ergibt sich folgende Differenzengleichung:

$$-\lambda B_{n+1} + (\lambda+\mu)B_n - \mu\, B_{n-1} = 1 \qquad \text{bzw.}$$

$$B_{n+2} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda} B_{n+1} + \frac{\mu}{\lambda} B_n = -\frac{1}{\lambda}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.[1)]

Lösung der homogenen Gleichung:

$$B_{n+2} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda} B_{n+1} + \frac{\mu}{\lambda} B_n = 0$$

---

1) Zur Lösungsmethode vgl. Goldberg (1968), Kapitel 3.

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$q^2 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda} q + \frac{\mu}{\lambda} = 0$$

$$q^2 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda} q + \left(\frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right)^2 = -\frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right)^2$$

$$\left(q - \frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right)^2 = \frac{-4\lambda\mu+\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}{4\lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda^2-2\lambda\mu+\mu^2}{4\lambda^2}$$

$$= \left(\frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^2$$

$$q - \frac{\lambda+\mu}{2\lambda} = \pm \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}$$

$$q_1 = \frac{\lambda-\mu+\lambda+\mu}{2\lambda} = 1$$

$$q_2 = \frac{-\lambda+\mu+\lambda+\mu}{2\lambda} = \frac{\mu}{\lambda}$$

Daraus ergibt sich folgende Lösung der homogenen Gleichung:

$$B_n^h = K_1\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n + K_2$$

Dabei sind K_1 und K_2 reelle Konstanten.

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$B_{n+2} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda} B_{n+1} + \frac{\mu}{\lambda} B_n = -\frac{1}{\lambda}$$

Wir benutzen die Versuchslösung $B_n^s = an$ und setzen sie in die homogene Gleichung ein:

$$a(n+2) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda} a(n+1) + \frac{\mu}{\lambda} an = -\frac{1}{\lambda}$$

$$an+2a - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}an - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}a + \frac{\mu}{\lambda}an = -\frac{1}{\lambda}$$

$$2a\lambda - a\lambda - a\mu = -1$$

$$a\lambda - a\mu = -1$$

$$a = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Somit lautet die spezielle Lösung:

$$B_n^s = \frac{n}{\mu-\lambda}$$

Die allgemeine Lösung hat folgende Form:

$$B_n = K_1\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n + K_2 + \frac{n}{\mu-\lambda}$$

Zur Bestimmung von K_1 und K_2 nutzt man die Randbedingung aus, daß $B_o = 0$:

$$B_o = 0 = K_1 + K_2$$

Beide Konstanten K_1 und K_2 werden aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen Null gesetzt:

$$K_1 = K_2 = 0$$

Somit erhält man für B_n folgenden Ausdruck:

$$B_n = \frac{n}{\mu-\lambda}$$

Zur Herleitung von A_n berechnen wir zuerst die Größe A_n^i. A_n^i ist der Erwartungswert der Zeit, die das System benötigt, startend im Zustand i zum ersten Mal Zustand n zu erreichen. Natürlich gilt dann $A_n^o = A_n$.

Betrachtet man einen Zustand i und die möglichen Übergänge, so führen die gleichen Oberlegungen wie eben zu folgender Gleichung:

$$A_n^i = \Delta t + \mu\Delta t A_n^{i-1} + (1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)A_n^i + \lambda\Delta t A_n^{i+1}$$

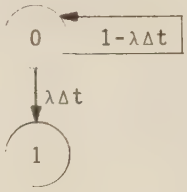
Dabei ist $o<i<n-1$. Auflösen der Klammer, Ordnen und Division durch Δt ergibt folgende Differenzengleichung:

$$-\lambda A_n^{i+1} + (\lambda+\mu)A_n^i - \mu A_n^{i-1} = 1 \qquad o<i<n-1$$

Diese Differenzengleichung in i stimmt mit der eben gelösten überein und hat somit folgende allgemeine Lösung:

$$A_n^i = k_1\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i + k_2 + \frac{i}{\mu-\lambda}$$

Die Konstanten k_1 und k_2 werden durch die Randbedingungen für i=o und i=n bestimmt: Für i=o kann man folgenden Wahrscheinlichkeitsgraph angeben:



Somit ergibt sich für A_n^o:

$$A_n^o = \Delta t + (1-\lambda\Delta t)A_n^o + \lambda\Delta t A_n^1$$

Nach Auflösen der Klammer, Ordnen und Division durch Δt erhält man folgende Gleichung:

$$-\lambda A_n^1 + \lambda A_n^o = 1$$

Die allgemeine Lösung eingesetzt ergibt:

$$\lambda(-k_1(\tfrac{\mu}{\lambda}) - k_2 - \frac{1}{\mu-\lambda} + k_1 + k_2) = 1$$

$$-\mu k_1 + \lambda k_1 = 1 + \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$k_1(\lambda-\mu) = \frac{\mu-\lambda+\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$k_1 = \frac{-\mu}{(\mu-\lambda)^2}$$

Die zweite Randbedingung für i=n besagt, daß $A_n^n=0$:

$$A_n^n = 0 = k_1(\tfrac{\mu}{\lambda})^n + k_2 + \frac{n}{\mu-\lambda}$$

$$k_2 = \frac{\mu}{(\mu-\lambda)^2}\frac{\mu^n}{\lambda^n} - \frac{n}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{\mu^{n+1}}{\lambda^n(\mu-\lambda)^2} - \frac{n}{\mu-\lambda}$$

Somit ergibt sich für A_n^i der Ausdruck:

$$A_n^i = \frac{-\mu}{(\mu-\lambda)^2}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i + \frac{\mu^{n+1}}{\lambda^n(\mu-\lambda)^2} + \frac{i-n}{\mu-\lambda}$$

$$A_n^o = A_n = \frac{-\mu}{(\mu-\lambda)^2} + \frac{\mu^{n+1}}{\lambda^n(\mu-\lambda)^2} - \frac{n}{\mu-\lambda}$$

$$A_n = \frac{-\mu\lambda^n+\mu^{n+1}}{\lambda^n(\mu-\lambda)^2} - B_n$$

Da $C_n = A_n + B_n$, hat man für C_n folgende Formel erhalten:

$$C_n = \frac{-\mu\lambda^n+\mu^{n+1}}{\lambda^n(\mu-\lambda)^2} = \frac{1-\kappa^n}{\mu\kappa^n(1-\kappa)^2}$$

Jackson stellt nun die Forderung auf, daß ein Simulationslauf einige Zeit länger als C_n dauern sollte. Dabei besteht allerdings noch das Problem, für welche n man C_n berechnen sollte bei vorgegebenem κ. Dazu stellt er folgende Überlegung an. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei dem System M/M/1 genau n Kunden im System sind, beträgt:

$$P_n = (1-\kappa)\kappa^n$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß n und mehr Kunden im System sind, läßt sich leicht berechnen:

$$\sum_{k=n}^{\infty} P_k = (1-\kappa)\sum_{k=n}^{\infty}\kappa^n$$

$$= (1-\kappa)\left(\frac{1}{1-\kappa} - \frac{1-\kappa^n}{1-\kappa}\right)$$

$$= (1-\kappa)\frac{\kappa^n}{1-\kappa}$$

$$= \kappa^n$$

Die Wahrscheinlichkeit $\theta = \kappa^n$ wird nun vorgegeben. Durch die Vorgabe von θ legt man sich auf ein ganz bestimmtes n fest. Alle Zustände, die größer oder gleich n sind, werden, da sie als sehr selten angenommen werden können, außer Betracht gelassen. Wählt man z.B. θ=0,10, so ergibt sich für κ=0,6 ein

Wert für n von 5, für κ=o,8 ergibt sich n=11, für κ=o,9 ergibt sich n=22. Hieraus erkennt man, je kleiner κ, umso unwahrscheinlicher sind große Werte von n. Die Vorgabe von θ ist jedoch willkürlich. Ein "konservativer" Experimentator wählt vielleicht θ=o,o1. Dann ergibt sich für dieselben Werte von κ wie eben folgende Werte für n: n=9, n=21 und n=44.

Setzt man nun in die Formel für C_n anstelle von κ^n die Größe θ ein, so erhält man:

$$T_\theta = \frac{1-\theta}{\theta} \frac{1}{\mu(1-\kappa)^2}$$

Diese Größe ist nicht mehr von n abhängig. Nach Jackson sollte nun ein Simulationslauf mehrere Male so lang wie T_θ dauern.

Er gibt zwei Tabellen an für verschiedene Werte von θ und κ, und zwar einmal T_θ gemessen in Einheiten der mittleren Bedienungszeit $1/\mu$, und einmal T_θ gemessen in Einheiten der durchschnittlichen Wartezeit.

Folgende Tabelle ist ein Ausschnitt der Tabelle für μT_θ von Jackson, wobei der Wert θ=o,o8 hinzugefügt wurde:

θ	κ		
	o,6	o,8	o,9
o,1o	56	225	9oo
o,o8	72	288	115o
o,o5	119	475	19oo
o,o1	62o	2475	99oo

Tabelle für Werte von μT_θ

Man erkennt, daß "Konservatismus vom Faktor 1/1o" den Wert von μT_θ um mehr als das Zehnfache vergrößert. Offen bleibt bei Jackson die Frage, wie lange nun wirklich der Prozess bis zum Erreichen der stationären Phase laufen sollte. Er spricht lediglich von einem Vielfachen der Zeit T_θ für die gesamte Simulationsdauer. Außerdem vermißt man Empfehlungen für den Praktiker über eine geeignete Wahl von θ.

Unsere Rechnungen haben gezeigt, daß bei dem betrachteten System die stationäre Phase nach einer Anlaufsphase der Länge T_θ mit θ=o,1o als erreicht gelten kann.

Ein anderer Vorschlag stammt von Morse (1958)[1]. Er gibt folgende Darstellung der zeitabhängigen Lösung der Übergangswahrscheinlichkeiten, wobei allerdings nur eine maximale Schlangenlänge N zugelassen ist (beschränkter Warteraum):

$$P_n^m(t) = P_n + \frac{2\kappa^{\frac{1}{2}(n-m)}}{N+1} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i(n)K_i(m)}{x_i} e^{-\gamma_i t} \qquad \begin{matrix} 1 \leq n \leq N \\ o \leq m \leq N \end{matrix}$$

Dabei sind $\gamma_i, x_i, K_i(n)$ und $K_i(m)$ wie folgt definiert:

$$\gamma_i = \lambda+\mu - 2\sqrt{\lambda\mu}\cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) = \mu x_i$$

$$K_i(n) = \sin\left(\frac{in\pi}{N+1}\right) - \sqrt{\kappa}\sin\left(\frac{i(n+1)\pi}{N+1}\right)$$

$K_i(m)$ analog

$P_n^m(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das System sich zum Zeitpunkt t im Zustand n befindet, wenn es sich zum Zeitpunkt t=o im Zustand m befunden hat. P_n ist die zeitunabhängige bzw. stationäre Zustandswahrscheinlichkeit.

Wir wollen jetzt das Konvergenzverhalten von $P_n^m(t)$ untersuchen. Dazu wollen wir voraussetzen, daß N so groß ist, daß die Annahme eines beschränkten Warteraums unerheblich ist.

$$|P_n^m(t) - P_n| \leq \frac{2\kappa^{\frac{1}{2}(n-m)}}{N+1} \sum_{i=1}^{N} \frac{|K_i(n)K_i(m)|}{|x_i|} e^{-\gamma_i t}$$

Da der Sinus maximal +1 und minimal -1 wird, kann man jedes $K_i(n)$ bzw. $K_i(m)$ abschätzen durch $1+\sqrt{\kappa}$. Für positive λ und μ ist die Größe γ_i immer positiv. Wir suchen jetzt das kleinste γ_i, denn für dieses γ_i ist der Exponentialausdruck $e^{-\gamma_i t}$ am größten.

Wir wollen zeigen, daß $\gamma_1 \leq \gamma_i$ für $1 \leq i \leq N$:

$$\lambda+\mu - 2\sqrt{\lambda\mu}\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \leq \lambda + \mu - 2\sqrt{\lambda\mu}\cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \geq \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right).$$

---

1) Vgl. Morse (1958), S. 65 ff.

Letztere Beziehung ist für $i \leq N$ immer richtig, da der Kosinus im Intervall $[0,\pi]$ monoton von +1 nach -1 fällt. Somit ist γ_1 das kleinste γ_i. Wir verkleinern γ_1 noch etwas, indem wir $\cos(\frac{\pi}{N+1})$ durch Eins ersetzen:

$$\gamma_1 = \lambda+\mu - 2\sqrt{\lambda\mu}\cdot\cos(\tfrac{\pi}{N+1}) > \lambda+\mu - 2\sqrt{\lambda\mu} = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2$$

$$\doteq \mu(1-\sqrt{\kappa})^2$$

Da wir N sehr groß vorausgesetzt haben, liegt $\cos(\pi/(N+1))$ sehr nahe bei Eins.

Da $x_i = \gamma_i/\mu$ gilt:

$$x_i > \frac{1}{\mu}\,\mu(1-\sqrt{\kappa})^2 = (1-\sqrt{\kappa})^2$$

Somit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$|P_n^m(t) - P_n| < \frac{2\kappa^{\frac{1}{2}(n-m)}}{N+1}\;\frac{N(1+\sqrt{\kappa})^2}{(1-\sqrt{\kappa})^2}\;e^{-\mu(1-\sqrt{\kappa})^2 t}$$

$$< 2\kappa^{\frac{1}{2}(n-m)}\;\frac{(1+\sqrt{\kappa})^2}{(1-\sqrt{\kappa})^2}\;e^{-\mu(1-\sqrt{\kappa})^2 t}$$

Man erkennt:

$$\lim_{t\to\infty} P_n^m(t) = P_n$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit, mit der $P_n^m(t)$ den Grenzwert P_n erreicht, hängt im wesentlichen von der Größe des Ausdrucks $\mu(1-\sqrt{\kappa})^2$ im Exponenten der Exponentialfunktion ab. Morse nennt den Kehrwert dieses Ausdrucks Relaxationszeit R:

$$R = \frac{1}{\mu(1-\sqrt{\kappa})^2} = \frac{(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2}{(\mu-\lambda)^2}$$

Nach einer Zeit R ist der zeitabhängige Teil auf $1/e \doteq 37\ \%$ seiner ursprünglichen Größe gefallen. Damit jedoch der zeitabhängige Term vernachlässigt werden kann, muß man ein Mehrfaches der Zeit R verstreichen lassen. Morse spricht von mindestens 3R. Ist t=3R, dann ist $e^{-3} \doteq 5\ \%$. Der zeitabhängige

Term ist dann sicherlich sehr viel kleiner als 5 % seines Anfangswertes. Die Größe R ist abhängig von λ und μ. Je mehr sich diese beiden Größen nähern, umso größer wird R. Anders ausgedrückt, je mehr die Kapazitätsausnutzung κ gegen Eins strebt, umso später wird sich der stationäre Zustand einstellen. Da für kleine κ auch R sehr klein ist, kann man in diesem Fall die Anlaufsphase 4R, 5R oder länger wählen. Der Mehrverbrauch an Simulationszeit ist relativ gering und die stationäre Phase wird sicher erreicht. Für große κ ist das sehr viel problematischer, wie man an den folgenden Zahlen für μR - die Relaxationszeit gemessen in Einheiten der mittleren Bedienungszeit $1/\mu$ - und $3\mu R$ sieht:

	κ		
	0,6	0,8	0,9
μR	20	90	380
$3\mu R$	60	270	1140
μT_θ θ=0,08	72	288	1150

Die Anlaufsphase für κ=0,9 muß mehr als viermal so groß sein wie für κ=0,8.
Zum Vergleich sind die entsprechenden μT_θ-Werte für θ=0,08 hinzugefügt.

Jackson hat angeregt, daß man die Zeit T_θ auch in Einheiten von R angeben kann:

$$T_\theta/R = \frac{1-\theta}{\theta} \quad \frac{1}{\mu} \quad \frac{1}{(1-\kappa)^2} \quad \frac{\mu(1-\sqrt{\kappa})^2}{1}$$

$$= \frac{1-\theta}{\theta} \quad \frac{1}{(1+\sqrt{\kappa})^2}$$

Wir haben die entsprechende Tabelle für die uns interessierenden Werte von κ ausgerechnet:

θ	κ		
	0,6	0,8	0,9
0,10	2,9	2,5	2,4
0,08	3,7	3,2	3
0,05	6	5,3	5
0,01	31	28	26

Tabelle für Werte von T_θ/R

Für ein fest vorgegebenes θ werden bei steigendem κ die Werte für T_θ/R immer kleiner, weil R stark anwächst. Wir haben bei unseren empirischen Rechnungen festgestellt, daß eine Anlaufsphase der Länge T_θ mit θ=o,1o in den meisten Fällen ausreichend ist. Das entspricht nicht ganz der dreifachen Relaxationszeit, wie man aus obiger Tabelle ersieht. Somit steht der Vorschlag von Morse nahezu im Einklang mit dem von Jackson.

Stange (1964) hat in einer eingehenden Studie für das System M/M/1 die Wahrscheinlichkeiten $P_n(\tau)$ für verschiedene Werte von κ errechnet und in Abhängigkeit von τ graphisch dargestellt, und zwar für n=o bis n=9. Dabei ist $\tau=\mu t$. Die Zeit wird auch hier gemessen in Einheiten der mittleren Bedienungszeit $1/\mu$. Ansonsten entsprechen die $P_n(\tau)$ den $P_n^m(t)$ bei Morse, wobei m=o. Aus den Graphiken erkennt man, daß alle $P_n(\tau)$ zuerst ein Maximum durchlaufen und dann allmählich einen konstanten Wert annehmen. Je größer n, umso länger dauert es, bis die Wahrscheinlichkeiten sich auf einen konstanten Wert eingependelt haben. Allerdings werden die Wahrscheinlichkeiten mit wachsendem n immer kleiner und damit unbedeutender. Diese Tatsache wurde ja auch von Jackson ausgenutzt, der bei der Berechnung von T_θ durch Vorgabe von θ große Werte von n wegen ihrer allzu geringen Bedeutung ausschließt. Folgende Tabelle enthält diejenigen Werte von τ, von denen ab die Wahrscheinlichkeiten $P_n(\tau)$ als konstant angesehen werden können. Sie wurden so weit wie möglich und natürlich mit einer gewissen Ungenauigkeit aus den Graphiken von Stange abgelesen.

	κ		
n	o,6	o,8	o,9
o	3o	1oo	
1	5o	1oo	
2	5o	1oo	
3	5o		8oo
4	5o	2oo	8oo
5	5o	2oo	8oo
6	5o	2oo	9oo
7	5o	2oo	1ooo
8	7o	2oo	
9	7o	3oo	

Tabelle für Werte von τ

Man sieht, daß auch diese Zahlen annähernd den Vorschlägen von Jackson und Morse entsprechen.
Stange gibt außerdem eine Abschätzung für die Differenz $L(\tau)-L$ an, wobei $L(\tau)$ die zeitabhängige Warteschlangenlänge ist:

$$|L(\tau) - L| \leq (\kappa\tau + \frac{\sqrt{\kappa}}{1-\kappa})e^{-(1-\sqrt{\kappa})^2\tau}$$

Wiederum erkennt man im Exponenten von e den Faktor $(1-\sqrt{\kappa})^2$, die rezibroke Relaxationszeit.

Ein weiterer Vorschlag zur Beschreibung des Übergangsverhaltens von Wartesystemen stammt von Bhat (1972). Er definiert zwei endliche Zeitmaße und studiert ihr Konvergenzverhalten. Das eine Maß ist ein Auslastungsfaktor, welcher den Bruchteil der Zeit angibt, während der das System beschäftigt ist. Das andere Maß nennt er Effektivitätsfaktor. Dieser gibt das Verhältnis an zwischen der Zeit, in der das System besetzt ist und zwischen der Zeit, in der es leer steht. Beide Maße werden dividiert durch ihre Werte, die sie im stationären Zustand des Systems erreichen.

Der Auslastungsfaktor ist folgendermaßen definiert. Es sei $P_n^m(t_k)$ die Wahrscheinlichkeit, daß kurz nach dem Zeitpunkt t_k genau n Kunden im System sind, wenn zum Zeitpunkt o genau m Kunden im System waren. Die Zeitpunkte $t_o, t_1, \ldots, t_k \ldots$ sind aufeinanderfolgende Abfertigungszeitpunkte. Es gilt

$$\lim P_o^m(t_k) = 1 - \kappa = P_o$$

für alle Systeme M/G/1, auf die wir uns im folgenden beschränken. Es sei:

$$M_n^m(t_k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} P_n^m(t_j)$$

Dann hat der Auslastungsfaktor folgende Form:

$$u_o^m(t_k) = \frac{1-M_o^m(t_k)}{\kappa}$$

Der Effektivitätsfaktor hat folgende Gestalt:

$$e_o^m(t_k) = \frac{(1-\kappa)(1-M_o^m(t_k))}{\kappa\, M_o^m(t_k)}$$

$$= \frac{(1-\kappa)u_o^m(t_k)}{M_o^m(t_k)}$$

Beide Maße konvergieren für $k\to\infty$ gegen Eins. Bhat hat Tabellen erstellt für neun Wartesysteme. Darunter sind die Systeme M/M/1, $M/E_2/1$, $M/E_5/1$, $M/E_{10}/1$ und M/D/1, die auch in dieser Arbeit untersucht werden. Eine solche Tabelle enthält die Werte von $u_o^o(t_k)$ und $e_o^o(t_k)$ und das jeweils zugehörige k für κ=o,1, κ=o,2 bis κ=o,9. Ein Ausschnitt aus der Tabelle für das System M/M/1 sei gegeben:

	$u_o^o(t_k)$			$e_o^o(t_k)$		
k \ κ	o,6	o,8	o,9	o,6	o,8	o,9
1	o,625	o,556	o,526	o,4oo	o,2oo	o,1oo
2	o,698	o,624	o,592	o,481	o,249	o,127
3	o,746	o,67o	o,636	o,54o	o,288	o,149
4	o,779	o,7o3	o,668	o,585	o,321	o,167
5	o,8o5	o,728	o,693	o,622	o,349	o,184
1o	o,876	o,8o4	o,767	o,738	o,451	o,248
15	o,9o8	o,844	o,8o6	o,799	o,519	o,294
2o	o,928	o,868	o,832	o,838	o,569	o,331
3o	o,95o	o,899	o,864	o,884	o,64o	o,389
4o	o,962	o,918	o,884	o,91o	o,691	o,433
5o	o,97o	o,931	o,899	o,927	o,729	o,47o
1oo		o,961	o,935		o,833	o,592
	o,6	o,8	o,9	1,5	4,o	9,o
	κ			$\kappa(1-\kappa)^{-1}$		

Die letzte Zeile der Tabelle enthält die Auslastung bzw. die Effektivität der stationären Phase.

Für κ=o,6 kann man ablesen, daß das System nach 15 Abfertigungen etwas mehr als 9o % seiner Auslastung, dagegen erst nach 4o Abfertigungen mehr als 9o % der Effektivität der stationären Phase, die hier 1,5 beträgt, erreicht hat. Man erkennt, daß für das System M/M/1 die Effektivität der stationären Phase mit der mittleren Warteschlangenlänge übereinstimmt. Aus diesem

Grunde und wegen den bereits diskutierten Vorschlägen von Jackson und Morse erscheint mir für das Erreichen der stationären Phase der Effektivitätsfaktor das sinnvollere Kriterium zu sein. Es sollten mindestens soviel Abfertigungen stattgefunden haben, daß das System mehr als 9o % der Effektivität der stationären Phase erreicht. Leider brechen die Tabellen bei k=1oo ab.

Die Vorschläge von Jackson und Morse beziehen sich auf das System M/M/1 und lassen sich auf eine Reihe anderer Systeme übertragen. Allerdings wird man für viele Wartesysteme die Größen T_θ oder R nicht angeben können, weil die mathematischen Schwierigkeiten zu groß sind. Dennoch können die Ergebnisse, die für das System M/M/1 gewonnen werden, als Richtlinien für viele andere kompliziertere Wartesysteme gelten. So wird ein Wartesystem, dessen Ankunftsprozeß ein Poissonprozeß ist, dessen Abfertigungsprozeß jedoch regelmäßiger ist als bei dem System M/M/1, bei gleicher Kapazitätsausnutzung die stationäre Phase schneller erreichen als das System M/M/1. Solche Wartesysteme mit einem regelmäßigeren Abfertigungsprozeß haben in der Regel eine kleinere mittlere eigentliche Schlangenlänge. Alle Systeme $M/E_k/1$ sind Beispiele für solche Prozesse. Diese Tatsache findet ihre Bestätigung auch in den Tabellen von Bhat. Wendet man somit auf ein solches System die Regeln des M/M/1 an, kann man sicher sein, die stationäre Phase zu erreichen.

Erwähnt sei noch eine Arbeit von Fishman (1972). Fishman untersucht bei einem autoregressiven Prozeß erster Ordnung den Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Schätzung des Erwartungswertes und der Varianz des Prozesses. Außerdem prüft er den Effekt des Abschneidens einer gewissen Anfangsperiode. Wenn $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ Realisationen des stochastischen Prozesses sind, so gibt er für Werte N^*, von denen ab der Einfluß der Anfangsbedingungen bei vorgegebenen Autokorrelationskoeffizienten kleiner als 1 % ist, die Schätzfehler für den Erwartungswert und die Varianz an.

Läßt sich ein in der Realität ablaufender stochastischer Prozeß höchstens in der sogenannten quasistationären Phase beob-

achten, so kann man u.U. mittels einer Monte-Carlo-Simulation denselben Prozeß in seiner eigentlichen stationären Phase studieren. Allerdings benötigt man hierzu die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung des stationären Zustands. Diese ist in der Regel unbekannt. Hat man jedoch eine ungefähre Vorstellung von der stationären Verteilung, so sollte man mit dieser Näherungsverteilung den Prozeß anlaufen lassen. Man wird dann sicher schnell die stationäre Phase des Prozesses erreichen. Eine Näherungsverteilung der stationären Phase kann man durch eine Simulationsvorstudie erhalten.

Ist nun wirklich einmal die exakte stationäre Verteilung bekannt, könnte man leicht einwenden, daß in diesem Fall Simulation ohnehin überflüssig sei, da sich ein solches System mathematisch vollständig analysieren läßt. Aber gerade diese Systeme sind für unsere Zwecke besonders wichtig. Sie bieten sich als Hilfsmodelle in dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Sinne an. In dieser Arbeit wird ausschließlich das System M/M/1 als Hilfsmodell verwendet. Die Verteilung der stationären Phase dieses Systems ist die geometrische Verteilung: Die Anzahl der Kunden im System ist geometrisch verteilt mit $P_n = (1-\kappa)\kappa^n$. Somit wird der Prozeß gestartet mit einer Zufallszahl n, die durch Realisation der geometrischen Verteilung wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben (GEOM) erzeugt wird. Der Prozeß befindet sich von Anfang an in seiner stationären Phase. Die Simulation eines solchen Systems in seiner stationären Phase gewährleistet, daß die aus diesem Modell stammende Hilfsvariable Y auch tatsächlich den Erwartungswert M hat, was bei einem zeitabhängigen Y sicherlich nicht exakt der Fall ist.

Zum anderen zeigen viele Wartesysteme, die mathematisch nicht analysierbar sind und deshalb als Hauptmodell simuliert werden, ähnliches Verhalten in Bezug auf die stationäre Phase wie so ein bekanntes System, so daß man u.U. mit der Realisierung der bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung der stationären Phase des Hilfsmodells eine Näherungsverteilung für die unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der stationären Phase des Hauptmodells gewinnt. Obwohl sich das Hilfsmodell bereits in seiner

stationären Phase befindet, empfiehlt es sich, noch eine relativ kurze Zeitspanne abzuwarten, bis man die eigentliche Beobachtungsperiode einsetzen läßt, damit der Hauptprozeß sich noch besser seiner stationären Phase anpassen kann. Im Flußdiagramm zur Berechnung von $\hat{L}$ (Abb. 4) ist dafür die Abfrage $i \leq M+H$ eingebaut. Es werden zuerst M+H Ankünfte abgewartet, bis die eigentliche Beobachtungsperiode einsetzt.

3.3.3 Schätzung der mittleren Warteschlangenlänge

Nach Abschnitt 3.3.1 wird die mittlere Schlangenlänge (durchschnittliche Zahl der Kunden im System) wie folgt geschätzt:

$$\hat{L} = \frac{1}{T} \sum_{i=o}^{\tilde{N}-1} L(t_i)(t_{i+1}-t_i)$$

Die gesamte Simulationsdauer T beträgt $t_{\tilde{N}}-t_o$, wobei t_o der Beginn der Beobachtungsperiode in der stationären Phase des Prozesses und $t_{\tilde{N}}$ der Ankunftszeitpunkt des (N+H)-ten Kunden ist.

Damit wir eine Varianz berechnen können, werden wir uns nicht mit der einen Schätzung $\hat{L}$ begnügen, sondern werden die Simulation für $\hat{L}$ n-mal wiederholen und erhalten die Schätzung $\hat{L}_1,\hat{L}_2,\ldots,\hat{L}_n$, die den Werten $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (Hauptmodell) bzw. den Werten $y_1,y_2,\ldots,y_n$ (Hilfsmodell) aus Abschnitt 2.2 entsprechen. Dabei erfolgt jede Wiederholung unabhängig von den vorangegangenen. Das wird dadurch erreicht, daß der Prozeß jedesmal neu gestartet wird, d.h. bei jeder Wiederholung wird die stationäre Verteilung von neuem realisiert. Die mittlere Warteschlange und die zugehörige Varianz wird dann nach den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Methoden geschätzt.

Im Fällen, wo die Verteilung der stationären Phase unbekannt ist, ist es aus Gründen der Simulationsdauer und somit der Rechenzeit nicht vorteilhaft, bei jeder Wiederholung eine sehr lange Anlaufsphase abzuwarten. Conway (1963) schlägt vor, nur bei dem ersten Simulationslauf die stationäre Phase durch Abschneiden einer gewissen Anfangsperiode zu erzeugen. Die nachfolgenden Läufe sollen jeweils mit dem Endzustand des vorangegangenen gestartet werden. Somit befindet sich der Prozeß bei jeder Wiederholung von Anfang an in der stationären Phase. Im Grunde läuft dieser Vorschlag darauf hinaus, einen einzigen

ausreichend langen Simulationslauf vorzunehmen, eine gewisse Anlaufsphase zu Beginn abzuschneiden und den Rest in n Abschnitte einzuteilen, für die dann jeweils die mittlere Warteschlangenlänge geschätzt wird. Zwar befindet man sich dann immer in der stationären Phase des Prozesses, aber die einzelnen Schätzungen $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \ldots, \hat{L}_n$ sind nicht mehr unabhängig voneinander, sie sind autokorreliert.

Es ist ein grundlegendes Problem bei Monte-Carlo-Simulationen daß die gewonnenen Ergebnisse meist autokorreliert sind. In diesem Fall ist die elementare statistische Theorie nicht mehr gültig. Köcher u.a. (1972)[1] beschreiben detailliert die Verfahren von Conway und Mechanic u. McKay zur Beseitigung der Autokorrelation. Gebhardt (1974 a und b) befaßt sich mit der Auswertung von autokorrelierten Simulationsergebnissen, insbesondere mit der Konstruktion von Konfidenzintervallen bei Warteschlangensimulationen.

Es stellt sich noch die Frage, ob bei Schätzung der mittleren Warteschlangenlänge es günstiger ist, mehrere kürzere Simulationsläufe oder weniger, aber dafür längere Simulationsläufe durchzuführen. Gafarian u. Ancker (1966) beantworden die Frage dahingehend, daß in der stationären Phase ein relativ kurzer Simulationslauf völlig ausreichend ist. Mehr Wiederholungen sind günstiger, denn sie produzieren Varianzreduktion.

4. Modell- und Programmbeschreibungen

4.1. Modellbeschreibungen

In dieser Arbeit werden insgesamt sieben Modelltypen simuliert, die die Bezeichnungen H1,H2,...,H7 tragen. Bei allen Modelltypen ist die Aufgabe die gleiche: Es soll die mittlere Warteschlangenlänge (durchschnittliche Zahl der Kunden im System) eines bestimmten Wartesystems geschätzt werden, wobei mit Hilfe der Methode der korrelierten Hilfsvariablen die Genauigkeit der Schätzung erhöht werden soll. Die verwendeten Wartesysteme wurden unter 3.2.1 bis 3.2.5 beschrieben.

---

1) Vgl. Köcher u.a. (1972), S. 153 ff.

Bei den Modelltypen H1 bis H5 wird die benötigte Hilfsvariable einem Hilfsmodell entnommen, wohingegen bei H6 und H7 als Hilfsvariable eine modellimmanente Variable verwendet wird. Als Hilfsmodell dient ausschließlich das einfache Wartesystem M/M/1, wie es in Abschnitt 3.2.1 beschrieben wurde.

Die Modelltypen H1 bis H5 bestehen also aus Doppelsimulationen: Gleichzeitig mit dem eigentlich interessierenden Wartesystem, dem sogenannten Hauptmodell, wird das System M/M/1 als Hilfsmodell mitsimuliert. Die Simulation beider Wartesysteme geschieht unter gleichen Parameterwerten, d.h. λ und μ und somit auch κ sind für beide Systeme gleich.

Modelltyp H1 besteht aus dem Hauptmodell M/M/2 mit der unter 3.2.2 beschriebenen Schlangendisziplin. Ist α=0,5 und sind die Abfertigungsraten beider Kanäle gleich groß, so entspricht dieses System dem traditionellen Wartesystem M/M/2.

Unter der Bezeichnung H2 werden einige der Systeme $M/E_k/1$ als Hauptmodelle simuliert. Hierbei kann man den Einfluß sinkender Korrelation auf die Effizienz der beiden Verfahren A und B studieren, denn mit wachsendem k werden sich Hauptmodell $M/E_k/1$ und Hilfsmodell M/M/1 immer unähnlicher. Es werden die Systeme $M/E_2/1$, $M/E_5/1$, $M/E_{10}/1$, $M/E_{20}/1$ und $M/E_{30}/1$ simuliert.

Außerdem wird unter der Bezeichnung H3 das System $M/E_\infty/1$ simuliert, das auch die Bezeichnung M/D/1 trägt. Bei diesem Wartesystem ist die Bedienungszeit konstant.

Modelltyp H4 beinhaltet die Simulation zweier Systeme $M/H_2/1$, und zwar für α=0,3 und α=0,1. Allerdings ist zu bemerken, daß für kleine α die Systeme $M/H_2/1$ sehr viel mehr Zeit benötigen, die stationäre Phase zu erreichen als das entsprechende System M/M/1.

Modelltyp H5 soll einmal eine Situation aus der Praxis beschreiben. Durch Beobachtung einer Abfertigungsstelle hat man herausgefunden, daß deren Ankunftsprozeß ein Poissonprozeß ist mit der mittleren Rate λ. Durch Messung der Bedienungszeiten ge-

winnt man eine Abfertigungszeitverteilung. Der rezibroke Mittelwert $\hat{\mu}$ dieser empirischen Abfertigungszeitverteilung ist eine Schätzung für μ. Als Hilfsmodell wählt man das System M/M/1 mit den Parametern λ und $\hat{\mu}$. In unserem Beispiel ist $\hat{\mu} \doteq 1$.

Unter der Bezeichnung H6 wird das System M/M/1, unter H7 werden einige Systeme $M/E_k/1$ simuliert, wobei im Unterschied zu vorher die Hilfsvariable dem eigentlichen Modell entnommen wird. Als Hilfsvariable dient die durchschnittliche Abfertigungszeit, denn es ist zu erwarten, daß mit langen Abfertigungszeiten eine große Schlangenlänge verbunden ist. Analoges gilt für kleine Abfertigungszeiten. Allerdings wird die Korrelation nicht allzu hoch sein, denn nach einer Folge von langen Bedienungszeiten benötigt die Warteschlange noch geraume Zeit, bis sie sich wieder normalisiert hat.

4.2 Programmbeschreibung

Die Modelltypen H1 bis H5 sind in ihrem Programmaufbau im wesentlichen identisch. Sie unterscheiden sich lediglich in der Berechnung der Abfertigungszeiten des Hauptmodells. Hierzu benötigt man je nach Wartesystem Zufallszahlen eines bestimmten Verteilungstyp, die nach den in Abschnitt 1.2.3 beschriebenen Methoden erzeugt werden. Die Berechnung des Ankunfts- und des Abfertigungszeitpunktes des i-ten Kunden geschieht dann nach den in Abschnitt 3.3.1 angegebenen Formeln. Speziell für das Wartesystem M/M/2 wurde ein Flußdiagramm (Abb. 5) zur Berechnung des Abfertigungszeitpunktes des i-ten Kunden erstellt.

Das folgende Flußdiagramm (Abb. 6) beschreibt den Programmablauf für die Modelltypen H1 bis H5, wobei sich geringfügige Modifikationen beim Einlesen ergeben können, wenn zusätzliche Parameter (wie z.B. MY1 und MY2 bei H1 oder α bei H4) benötigt werden. Die beigestellten Indizes 1 und 2 beziehen sich auf das Hilfsmodell bzw. auf das Hauptmodell.

Auf eine detaillierte Darstellung des Programmablaufes kann verzichtet werden, da die wichtigsten Programmteile bereits beschrieben und dargestellt wurden.

In dem Flußdiagramm (Abb. 6) sind Bezeichnungen, wie sie im Programm verwendet wurden und wie sie teilweise auf dem Computerausdruck erscheinen, übernommen worden. LAM ist die mittlere Ankunftsrate, MY die mittlere Abfertigungsrate. Es werden insgesamt P Wiederholungen der Einzelsimulationen (Abb. 4) durchgeführt. P entspricht also dem n in Abschnitt 2.2. Vor jeder Wiederholung wird die stationäre Phase des Systems M/M/1 jedesmal neu durch den Aufruf GEOM erzeugt. GEOM liefert eine geometrisch verteilte Zufallszahl H. Jede Wiederholung wird somit gestartet unter der Anfangsbedingung, daß sich H Kunden in einer Warteschlange vor der Abfertigungsstelle befinden, wovon der erste gerade zur Abfertigung zugelassen wird.

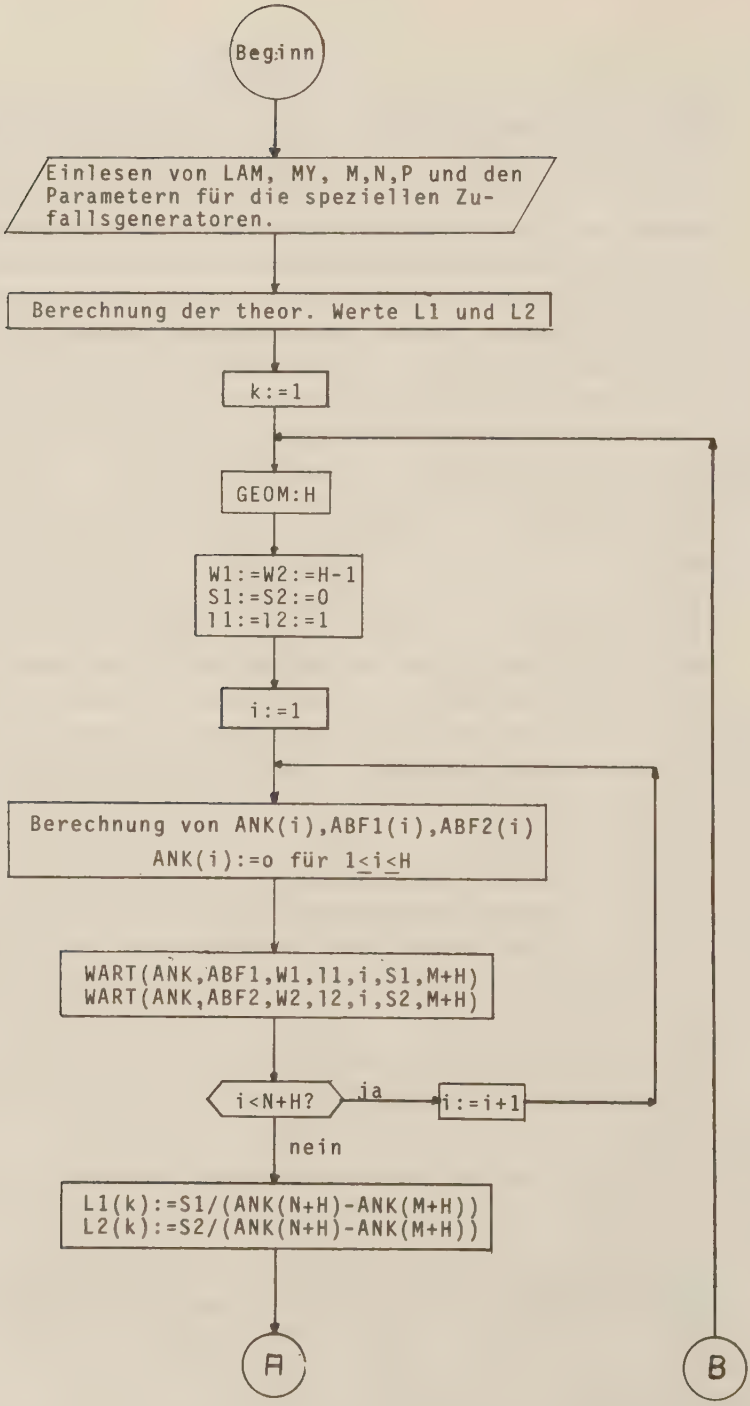
Es werden insgesamt N+H Ankunfts- und Abfertigungszeitpunkte berechnet. Nach jeder Berechnung des Tripels [ANK(i),ABF1(i), ABF2(i)] wird das Unterprogramm WART aufgerufen, und zwar für beide Wartesysteme: Hilfsmodell und Hauptmodell. Das Unterprogramm WART schreibt die Warteschlange mit den jeweils aktuellen Werten der Parameter, die hinter WART in Klammern angegeben sind, fort. WART ist ein Teil des Flußdiagramms von Abbildung 4.

Der Beginn der eigentlichen Beobachtungsperiode ist ANK(M+H), das Ende ANK(N+H).

Die Größe U nimmt nacheinander die Werte 1,2,3,...,15,20,25, ...,P an. Sobald k mit U übereinstimmt, wird nach der Methode der korrelierten Hilfsvariablen (Verfahren A und B) außer für k=1 und k=2 die mittlere Zahl der Kunden im System des Hauptmodells geschätzt. Dabei ist COV die Kovarianz und KOR der Korrelationskoeffizient der beiden Zahlenreihen [L1(k),L2(k)], $1 \leq k \leq U$. Die Größe REG-Regressionskoeffizient - entspricht dem b in Abschnitt 2.2.

Man erkennt, daß für beide Wartesysteme nur einmal die Ankunftszeiten zu berechnen sind.

Der Programmablauf bei H6 und H7 ist etwas einfacher. An die Stelle der ABF1(i) treten die Bedienungszeiten TB1(i), die


Beginn
Einlesen von LAM, MY, M,N,P und den Parametern für die speziellen Zufallsgeneratoren.
Berechnung der theor. Werte L1 und L2
k:=1
GEOM:H
W1:=W2:=H-1
S1:=S2:=0
11:=12:=1
i:=1
Berechnung von ANK(i),ABF1(i),ABF2(i)
ANK(i):=o für 1≤i≤H
WART(ANK,ABF1,W1,11,i,S1,M+H)
WART(ANK,ABF2,W2,12,i,S2,M+H)
i<N+H?
ja
i:=i+1
nein
L1(k):=S1/(ANK(N+H)-ANK(M+H))
L2(k):=S2/(ANK(N+H)-ANK(M+H))
A
B

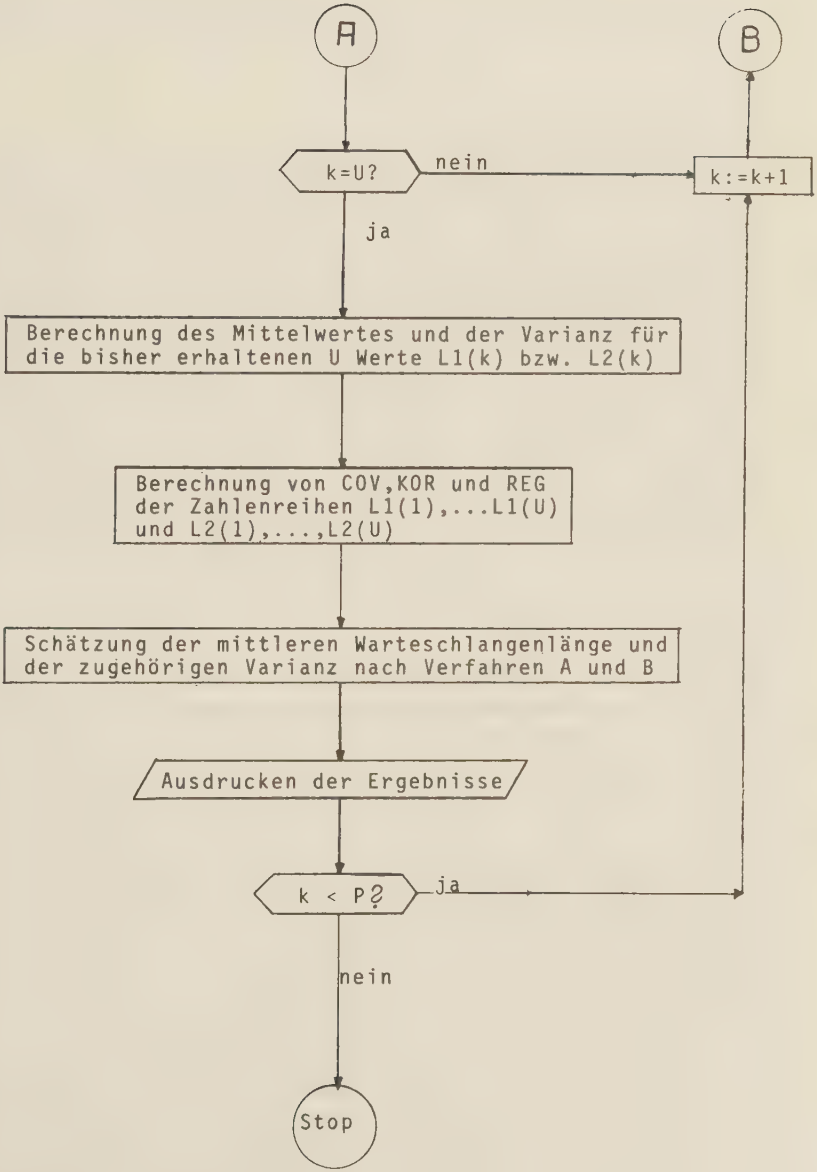

A
B
k=U?
nein
k:=k+1
ja
Berechnung des Mittelwertes und der Varianz für die bisher erhaltenen U Werte L1(k) bzw. L2(k)
Berechnung von COV,KOR und REG der Zahlenreihen L1(1),...L1(U) und L2(1),...,L2(U)
Schätzung der mittleren Warteschlangenlänge und der zugehörigen Varianz nach Verfahren A und B
Ausdrucken der Ergebnisse
k < P?
ja
nein
Stop

Abb. 6

sukzessive aufaddiert und dann gemittelt werden. Es entfällt der erste Aufruf von WART. Die Mittelwerte werden bezeichnet mit L1(k), $1 \leq k \leq P$. Die übrigen Rechnungen laufen wie beschrieben ab.

Ergebnisse und Auswertung

Die sieben beschriebenen Modelltypen wurden durchgerechnet für $\kappa=0{,}6$, $\kappa=0{,}8$ und teilweise auch für $\kappa=0{,}9$. Außerdem wurden die Werte für M und N variiert. Der maximale Wert von P (Anzahl der Wiederholungen) war bei allen Rechnungen 5o. Da das insgesamt erhaltene Zahlenmaterial sehr umfangreich ist, werden wir im folgenden nur die Ergebnisse für P=3o und P=5o angeben. Es hat sich gezeigt, daß 3o Wiederholungen bei allen Programmläufen ausreichend sind in dem Sinne, daß ein geeignetes Konfidenzintervall um den Schätzwert den wahren Wert enthält. Für P=5o ergibt sich natürlich eine zusätzliche Reduktion der Standardabweichung. Außerdem sind die Schätzungen meist besser. Wenn man jedoch bedenkt, daß man fast 7o % mehr Rechenzeit benötigt, so ist ein Gewinn an Effizienz in Frage gestellt.

Im Anschluß an dieses Kapitel werden wir zu jedem Modelltyp einige Kopien der Computerausdrucke veröffentlichen, die detaillierteres Zahlenmaterial enthalten. Ein Ausdruck ist folgendermaßen aufgebaut. Nach Angabe der Bezeichnung wird der Modelltyp noch einmal näher spezifiziert, wobei die theoretischen Werte für die mittlere Zahl der Kunden im System für Hauptmodell und Hilfsmodell (bei H6 und H7 für die durchschnittliche Abfertigungszeit) wiedergegeben werden. In der nächsten Zeile (Parameterzeile) sind die wichtigsten Eingangsparameter aufgeführt. Die erste Größe in dieser Zeile, die mittlere Ankunftsrate λ, die aus technischen Gründen mit LAM bezeichnet wird, stimmt mit der Kapazitätsauslastung κ überein. Denn bei allen Programmläufen wird die mittlere Abfertigungsrate μ Eins gesetzt: MY=1, und bekanntlich ist $\kappa=\lambda/\mu$. Die Größen M und N bestimmen die Länge der Beobachtungsperiode T: T=ANK(N+H)-ANK(M+H). Die Größe P gibt die maximale Anzahl der Wiederholungen der Simulationsläufe an. Die weiteren Größen, die je nach Modelltyp ebenfalls in der Parameterzeile ausgedruckt sind, werden von Fall zu Fall erläutert.

Dann beginnt der Ausdruck der eigentlichen Ergebnisse. Die Kopfzeile enthält die Bezeichnungen für die einzelnen Spalten. Jede ausgedruckte Zeile repräsentiert das Ergebnis der Simulation für genau K Wiederholungen $1 \leq K \leq P$. Und zwar wird ausgedruckt Mittelwert (MITTELW) und zugehörige Standardabweichung (STANDAB) des Hilfsmodells (bei H2 mit POISSON bezeichnet), Mittelwert und Standardabweichung des Hauptmodells (bei H2 mit ERLANG überschrieben), anschließend Mittelwert und Standardabweichung nach Verfahren A (REG-METH) und nach Verfahren B (DIFF-METH). Es folgen Korrelationskoeffizient (KOR-KOEF) und Regressionskoeffizient (REG-KOEF). Die letzten beiden Zahlen einer jeden Zeile sind Reduktionszahlen (REDUKTION), die das Ausmaß der Reduktion der Standardabweichungen für Verfahren A bzw. B angeben. Sie dienen uns als Maß für die Effizienz der beiden Verfahren A und B und sind das Ergebnis der Division der Standardabweichungen von Verfahren A bzw. B durch die Standardabweichung des Hauptmodells. Nur wenn diese Zahlen kleiner als Eins sind, haben Varianzreduktionen stattgefunden. Die Reziprokwerte dieser Zahlen geben das Vielfache an, um das die Varianz verkleinert wurde. Wir wollen die Reziprokwerte Verkleinerungsfaktoren nennen. Diese erscheinen nicht auf den Computerausdrucken. Da es manchmal einleuchtender sein kann, mit Verkleinerungsfaktoren zu argumentieren, geben wir eine Tabelle einiger markanter Verkleinerungsfaktoren und zugehöriger Reduktionszahlen an.

Verkleinerungsfaktor	Reduktion	Verkleinerungsfaktor	Reduktion
1	1	3,5	o,29
1,1	o,9o	4	o,25
1,2	o,83	5	o,2o
1,3	o,76	6	o,17
1,4	o,71	8	o,13
1,5	o,67	1o	o,1
1,6	o,63	15	o,o6
1,8	o,56	2o	o,o5
2	o,5o	25	o,o4
2,5	o,4o	3o	o,o3
3	o,33	4o	o,o2

Auf den Computerausdrucken kann man also studieren, wie sich die Schätzungen der Mittelwerte und Varianzen entwickeln, wenn man die Zahl der Wiederholungen sukzessive erhöht. Außerdem hat man einen direkten Vergleich zwischen den üblichen Schätzungen und den nach den raffinierteren Methoden gewonnenen Schätzungen. Neben dem Korrelationskoeffizient wird auch der Regressionskoeffizient angegeben.

Im folgenden werden wir die Ergebnisse für die einzelnen Modelltypen in kleinen Tabellen schildern, wobei wir uns auf die nach Verfahren A bzw. B erzielten Schätzungen beschränken wollen. Die in den ersten Spalten der Tabellen angegebenen Parameterwerte gelten solange, bis in der betreffenden Spalte ein neuer Wert erscheint. L ist der theoretische Wert des Hauptmodells. Die in der Spalte für κ erscheinenden Sterne bedeuten, daß der Computerausdruck dieses Programmlaufes im Anschluß an dieses Kapitel beigefügt ist. Auf dem Computerausdruck für H1 ist zusätzlich hinter L noch der Wert für L_S angegeben.

H1:

Bei H1 hat das Hauptmodell zwei Abfertigungsstellen: Kanal I und Kanal II. Kanal I arbeitet mit mittlerer Rate MY1, Kanal II mit mittlerer Rate MY2. Sind beide Kanäle leer, wählt ein ankommender Kunde mit Wahrscheinlichkeit ALPHA Kanal I zu seiner Abfertigung aus, mit Wahrscheinlichkeit 1-ALPHA Kanal II. Da das Hilfsmodell möglichst unter gleichen Parameterwerten simuliert werden sollte, ist die mittlere Abfertigungsrate des Hilfsmodells gleich der Summe der mittleren Abfertigungsraten beider Kanäle des Hauptmodells: MY = MY1 + MY2. Die Werte für MY1, MY2 und ALPHA sind in der Parameterzeile des Computerausdrucks angegeben.

						AL-		A				B			
κ	M	N	P	MY1	MY2	PHA	L	$\bar{z}$	$\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	Red	$\bar{z}$	$\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	Red.	KOR
o,6	5o	25o	3o	o,1	o,9	o,1	2,1381	2,1721	o,o176	o,23	2,1582	o,o199	o,25	o,9742
*			5o					2,1621	o,o131	o,2o	2,1573	o,o143	o,22	o,98oo
	1oo	3oo	3o					2,1167	o,o173	o,27	2,122o	o,o176	o,28	o,9625
*			5o					2,1239	o,o149	o,21	2,1239	o,o149	o,21	o,9781
	2oo	4oo	3o					2,1484	o,o231	o,32	2,1473	o,o231	o,32	o,9477
*			5o					2,14o5	o,o153	o,28	2,1363	o,o155	o,28	o,9614
o,8	5o	25o	3o	o,9	o,1	o,1	4,8257	4,8555	o,o489	o,17	4,8424	o,o5oo	o,17	o,9856
*			5o					4,7887	o,o39o	o,12	4,7849	o,o4o8	o,12	o,9931
*			3o	o,3	o,7	o,1	4,4653	4,4632	o,o325	o,o7	4,4626	o,o327	o,o7	o,9973
			5o					4,439o	o,o253	o,o8	4,44o1	o,o254	o,o8	o,9966
*			3o	o,5	o,5	o,5	4,4444	4,4671	o,o211	o,o6	4,4656	o,o217	o,o6	o,9984
			5o					4,446o	o,o178	o,o6	4,4457	o,o178	o,o6	o,9984

Für κ=0,6 stellt man fest, daß für M=50, N=250 und P=30 bereits gute Ergebnisse erzielt werden. Die nachfolgenden Kombinationen von M, N und P schätzen zwar L etwas besser, erfordern aber auch dementsprechend mehr Rechenzeit. Dieselbe Erfahrung wurde für κ=0,8 gemacht. Aus diesem Grunde kann auf diese Zahlen verzichtet werden. Für κ=0,8 wurde der Effekt der Änderung der Abfertigungsraten von Kanal I und Kanal II bei festgehaltenem M und N untersucht. Man erkennt ein Ansteigen der Korrelation, wenn sich die Abfertigungsraten nicht mehr allzu viel unterscheiden bzw. gleich sind. Der Fall MY1=MY2= ALPHA=0,5 entspricht dem klassischen M/M/2-Wartesystem.

Die Reduktion liegt bei allen Rechnungen in ungefähr der gleichen Größenordnung. Die Standardabweichung wird bei beiden Verfahren um mehr als das Dreifache der ursprünglichen reduziert. Das entspricht einer Varianzreduktion um mehr als das Neunfache.

Die Korrelation ist bei allen Programmläufen sehr hoch, obwohl sich doch Hauptmodell und Hilfsmodell qualitativ stark unterscheiden. Trotz der verschiedenartigen Struktur der beiden Wartesysteme sind sich die Warteprozesse offensichtlich sehr ähnlich. Hieraus ergibt sich die Konsequenz, daß man für ein Wartesystem mit mehreren Abfertigungsstellen durchaus ein einfacheres Wartesystem mit nur einer Abfertigungsstelle als Hilfsmodell wählen kann.

Interessant bei H1 ist außerdem die Tatsache, daß sich Verfahren A und B ebenbürtig sind. Beide Verfahren liefern aufgrund der starken Korrelation eine große Varianzreduktion und somit ein hoher Gewinn an Effizienz. Betrachtet man die Computerausdrucke, so erkennt man, daß in der Tat die Voraussetzungen für Verfahren B nahezu ideal erfüllt sind. Das bedeutet, daß sich beide Verfahren kaum unterscheiden.

H2 und H3:
Bei H2 werden die Systeme $M/E_k/1$ simuliert mit verschiedenen Werten von k. Da H3 lediglich ein Spezialfall von H2 ist ($k=\infty$), wird er dazugenommen. In der folgenden Tabelle wie auf den Computerausdrucken in der Parameterzeile erscheint die Größe FR (außer bei H3), die mit k, der Zahl der Freiheitsgrade, identisch ist.

κ	M	N	P	FR	L	A $\bar{z}$	A $\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	A Red.	B $\bar{z}$	B $\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	B Red.	KOR
o,6	o	2oo	3o	2	1,275o	1,2968	o,o157	o,28	1,275o	o,o292	o,53	o,9586
			5o			1,2987	o,o116	o,27	1,2864	o,o219	o,5o	o,9638
	5o	25o	3o			1,2881	o,o129	o,24	1,2781	o,o255	o,48	o,9697
*			5o			1,29o7	o,oo93	o,21	1,275o	o,o192	o,44	o,9767
	1oo	3oo	3o			1,2896	o,oo98	o,19	1,2972	o,o197	o,38	o,9815
			5o			1,2862	o,oo88	o,21	1,2837	o,o165	o,39	o,978o
	2oo	4oo	3o			1,28o7	o,oo95	o,19	1,2795	o,o199	o,41	o,98o9
			5o			1,281o	o,oo87	o,24	1,2835	o,o174	o,47	o,9714
	5o	15o	3o	5	1,14oo	1,16o5	o,o184	o,44	1,1442	o,o4o2	o,96	o,8974
*			5o			1,1634	o,o14o	o,41	1,1375	o,o311	o,91	o,9129
			3o	1o	1,o95o	1,1131	o,o21o	o,55	1,o942	o,o464	1,22	o,8347
*			5o			1,1177	o,o161	o,52	1,o873	o,o364	1,17	o,8555
			3o	2o	1,o725	1,o88o	o,o225	o,62	1,o676	o,o5o1	1,38	o,7841
*			5o			1,o938	o,o172	o,59	1,o6o5	o,o397	1,37	o,8o53
			3o	3o	1,o65o	1,o788	o,o232	o,65	1,o578	o,o515	1,44	o,76o5
*			5o			1,o849	o,o177	o,63	1,o5o4	o,o411	1,45	o,78oo
			3o	∞	1,o5oo	1,o615	o,o277	o,77	1,o386	o,o573	1,59	o,6396
*			5o			1,o693	o,o21o	o,77	1,o3o6	o,o466	1,7o	o,6414
o,8	o	2oo	3o	2	3,2ooo	3,4146	o,o818	o,28	3,4144	o,o967	o,33	o,96o8
*			5o			3,46o6	o,o565	o,23	3,46o5	o,o679	o,28	o,9732
	5o	25o	3o			3,2833	o,o544	o,17	3,2821	o,o942	o,3o	o,9851
*			5o			3,31o5	o,o431	o,2o	3,3294	o,o7o7	o,33	o,9797
	1oo	3oo	3o			3,256o	o,o453	o,27	3,3212	o,o787	o,46	o,964o
*			5o			3,2756	o,o439	o,25	3,2632	o,o674	o,39	o,9676
	2oo	4oo	3o			3,3689	o,o413	o,21	3,4258	o,o572	o,3o	o,9767
*			5o			3,2616	o,o433	o,2o	3,3o45	o,1195	o,55	o,9798
	1oo	3oo	3o	5	2,72oo	2,7435	o,o663	o,51	2,8629	o,1353	1,o5	o,8579
			5o			2,8399	o,o815	o,49	2,822o	o,1o98	o,66	o,8728
			3o	1o	2,56oo	2,5795	o,o747	o,63	2,717o	o,1549	1,3o	o,7796
			5o			2,7o79	o,o988	o,58	2,6886	o,1268	o,74	o,8168
			3o	2o	2,48oo	2,5o22	o,o819	o,7o	2,6488	o,1663	1,42	o,7155
			5o			2,6421	o,11o1	o,63	2,6219	o,138o	o,79	o,7775
			3o	3o	2,4533	2,47o3	o,o856	o,73	2,621o	o,1716	1,47	o,6824
			5o			2,6144	o,1147	o,65	2,5937	o,1429	o,81	o,7596
			3o	∞	2,4ooo	2,4346	o,1o69	o,85	2,5992	o,1945	1,55	o,526o
			5o			2,58o5	o,133o	o,73	2,5579	o,1623	o,89	o,6885
o,9	2oo	4oo	3o	2	6,975o	7,692o	o,2726	o,25	7,7429	o,2928	o,27	o,9675
*			5o			7,6388	o,2364	o,26	7,6288	o,3o42	o,33	o,9656

Die Ergebnisse für M=o sind für κ=o,6 und κ=o,8 unbefriedigend. Die Schätzungen für L, die Werte von $\bar{z}$, sind für die beiden angegebenen Fälle etwas zu hoch. Das entspricht dem in Abschnitt 3.3.2 gesagten: Während sich das Hilfsmodell bereits in der stationären Phase befindet, wie man aus den Computerausdrucken an den ursprünglichen Schätzungen ersieht, benötigt das Hauptmodell doch etwas mehr Zeit, um seinen stationären Zustand zu erreichen. Aus dem Zahlenmaterial erkennt man, je größer man M

macht, umso besser werden die Schätzungen. Allerdings bei einem sehr hohen Auslastungsgrad wie κ=o,9 genügt selbst ein Wert von M=2oo nicht, damit das System seine stationäre Phase erreicht. Die ursprünglichen sowie die nach Verfahren A und B gewonnenen Schätzungen sind zu hoch.

Läßt man M und N konstant und vergrößert sukzessive FR, so werden sich Hauptmodell und Hilfsmodell immer unähnlicher. Damit verbunden ist eine Abnahme der Korrelation. Während man für FR=2 noch eine sehr hohe Korrelation feststellt, ist sie für FR=∞ auf unter o,65 gesunken. Hieraus resultiert eine Abnahme der Effizienz der beiden Verfahren A und B. Während Verfahren A immer eine Reduktion der Standardabweichungen produziert, versagt Verfahren B bereits ab FR=5, obwohl Verfahren B die Größe L oftmals besser schätzt (in zwei Fällen sogar exakt) als Verfahren A. Dennoch ist Verfahren A in allen Fällen das effizientere Verfahren. Es ist nicht auf eine so hohe Korrelation wie Verfahren B angewiesen. Allerdings sollte die Korrelation auch nicht kleiner als o,6 sein.

Erstaunlich ist auch die Tatsache, daß bei Verfahren A für P=5o die Schätzungen für L außer bei M=2oo schlechter ausfallen als für P=3o. Diese Erscheinung ist wohl auf den Zufall bzw. auf die Zufallszahlen zurückzuführen.

H4:
Bei H4 wird die mittlere Warteschlangenlänge der Systeme $M/H_2/1$ geschätzt. Die Systeme werden durch die Angabe der Wahrscheinlichkeit ALPHA festgelegt, die auch in der Parameterzeile der Computerausdrucke erscheint. Die Systeme $M/H_2/1$ haben gegenüber dem Hilfsmodell M/M/1 eine große mittlere Warteschlangenlänge. Für ALPHA=o,5 sind die Systeme $M/H_2/1$ und M/M/1 identisch. Mit kleiner werdenden ALPHA nimmt die Ähnlichkeit immer mehr ab.

κ	M	N	P	ALPHA	L	A $\bar{z}$	A $\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	A Red.	B $\bar{z}$	B $\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	B Red.	KOR
o,6	1oo	3oo	3o	o,3	1,6714	1,777o	o,o437	o,31	1,77o2	o,o498	o,35	o,9512
*			5o			1,7147	o,o394	o,42	1,7154	o,o412	o,43	o,9o97
			3o	o,1	3,1ooo	3,2967	o,2518	o,87	3,2871	o,254o	o,87	o,4984
*			5o			3,12o2	o,1949	o,9o	3,1213	o,1959	o,91	o,4349
o,8			3o	o,3	4,6o95	5,o9o9	o,3663	o,62	5,o383	o,3713	o,63	o,7865
*			5o			4,8218	o,2379	o,58	4,7913	o,24o1	o,59	o,8143
			3o	o,1	9,6889	9,4664	o,9523	o,94	9,5247	o,9547	o,95	o,3339
*			5o			8,4982	o,7o37	o,96	8,6ooo	o,7127	o,98	o,2657
	2oo	4oo	3o			1o,2319	1,o718	o,77	1o,4199	1,21o2	o,87	o,6422
*			5o			9,3423	o,81o5	o,8o	9,4oo2	o,8642	o,85	o,6o46
o,9	1oo	3oo	3o	o,3	1o,5429	1o,2243	o,73oo	o,38	1o,2896	o,732o	o,38	o,9261
*			5o			1o,1956	o,4743	o,37	1o,2162	o,4746	o,37	o,93o7

Bei diesem Modelltyp arbeitet Verfahren A nur geringfügig besser als Verfahren B. Für ALPHA=o,3 erhält man in allen Fällen eine relativ hohe Korrelation und eine teilweise recht gute Reduktion der Standardabweichungen. Für ALPHA=o,1 ist die Korrelation teilweise sehr gering und somit auch die erzielte Reduktion. Die Erhöhung von M und N bei κ=o,8 auf 2oo bzw. 4oo bewirkt, daß das System näher an seine stationäre Phase rückt. Die Schätzungen, die bis dahin zu klein waren, sind jetzt in der richtigen Größenordnung. Auch die Korrelation ist angestiegen. Bei κ=o,9 und ALPHA=o,1 müßte man ein Vielfaches der gewählten Werte für M und N nehmen, damit ein solches System die stationäre Phase erreicht.

H5:

Bei H5 wird ein System mit einer empirischen Abfertigungszeitverteilung simuliert, die in Abschnitt 1.2.3 angegeben ist. Da beide Modelle, Hilfsmodell wie Hauptmodell, unter gleichen Parameterwerten simuliert werden sollen, ist die mittlere Abfertigungsrate aus der empirischen Abfertigungszeitverteilung zu schätzen. Sie beträgt ungefähr Eins.

κ	M	N	P	A $\bar{z}$	A $\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	A Red.	B $\bar{z}$	B $\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	B Red.	KOR
o,6	5o	25o	3o	1,274o	o,o163	o,32	1,2625	o,o3o1	o,59	o,9469
*			5o	1,2766	o,o118	o,29	1,2578	o,o234	o,57	o,9573
o,8			3o	3,27o5	o,o627	o,2o	3,2693	o,o989	o,31	o,98o4
*			5o	3,3252	o,o573	o,26	3,3438	o,o794	o,36	o,9653

In diesem Fall hat man natürlich keine theoretischen Werte L. Aus dem vorliegenden Zahlenmaterial erkennt man jedoch, daß das System M/M/1 das geeignete Hilfsmodell für dieses Wartesystem ist. Beide Verfahren liefern beträchtliche Reduktionen der Standardabweichungen.

H6 und H7:
Bei H6 und H7 wird der Versuch gemacht, eine modellimmanente Variable als korrelierte Hilfsvariable zu verwenden. Und zwar wurde die mittlere Abfertigungszeit gewählt unter der Vorstellung, daß eine Serie von langen Abfertigungszeiten eine große Schlangenlänge verursacht. Allerdings ist zu erwarten, daß die Korrelation nicht allzu hoch ist, da die Warteschlange sehr viel länger Zeit braucht, sich zu normalisieren. Bei H6 wird das System M/M/1 simuliert, bei H7 das System $M/E_2/1$. Das System M/M/1 befindet sich von Anfang an in seiner stationären Phase. Daher kann man M=o setzen. Bei H7 muß man eine gewisse Zeit verstreichen lassen, bis die eigentliche Beobachtungsperiode einsetzen kann.

							A			B			
	κ	M	N	P	FR	L	$\bar{z}$	$\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	Red.	$\bar{z}$	$\hat{\sigma}_{\bar{z}}$	Red.	KOR
H6	o,8	o	2oo	3o	-	4,ooo	3,951o	o,31oo	o,93	3,996o	o,33o2	o,99	o,3783
*				5o			3,9929	o,2599	o,94	4,oooo	o,2735	o,99	o,3421
H7	o,8	5o	25o	3o	2	3,2oo	3,2759	o,3156	1,oo	3,2838	o,o8o9	1,oo	o,o8o9
*				5o			3,23o6	o,2124	o,99	3,2375	o,214o	1,oo	o,15o3

Die Ergebnisse bestätigen die vorhin angestellte Vermutung, daß die Korrelation zu klein ist. Beide Verfahren können nicht mehr effizient arbeiten. Gleichwohl sind die Schätzungen für L ausgezeichnet. Erhöht man die Simulationsdauer, so verschwindet die Korrelation ganz. Ebenso bei Systemen $M/E_k/1$ mit k>2. Trotz dieser etwas entmutigenden Ergebnisse sei darauf hingewiesen, daß die Rechenzeit kaum mehr als die Hälfte der Zeit beträgt, die man für einen entsprechenden Modelltyp mit Hilfsmodell benötigt. Falls wirklich einmal eine modellimmanente Variable zur Verfügung steht, die mit der zu schätzenden Variablen ausreichend korreliert ist, kann aufgrund der kürzeren Rechenzeit dieses Vorgehen durchaus effizienter sein als die Verwendung eines Hilfsmodells.

Die vorliegenden Ergebnisse haben gezeigt, daß das Verfahren der korrelierten Hilfsvariablen in der Variante A bereits ab einer relativ geringen Korrelation (KOR$\geq$o,6) zufriedenstellende Reduktionen der Standardabweichungen und damit erst recht der Varianzen liefert. Aber auch für kleinere Werte des Korrelationskoeffizienten werden Reduktionen produziert. Variante A arbeitet in fast allen Fällen effizienter als Variante B. Lediglich bei H1 waren sie ebenbürtig. Somit sollte man A immer den Vorrang geben, zumal bei Verwendung von B in Bezug auf Rechenzeit und Programmieraufwand keine nennenswerten Vorteile entstehen.

H 1

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES WARTESYSTEMS MIT ZWEI EV. VERSCHIEDENEN

ABFERTGUNGSSTELLEN (POISSON) GESCHAETZT (THEOR. WERTE= 2.1381 0.7697).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1.5000

LAM=0.6 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50 MY1=0.1 MY2=0.9 ALPHA=0.1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	1.4434	0.0000	2.1572	0.0000								
2	1.7299	0.2026	2.3868	0.1624								
3	1.6063	0.1686	2.2302	0.1676	2.1272	0.0377	2.1239	0.0380	+0.9744	+0.9686	0.22	0.23
4	1.4467	0.1873	2.0688	0.1879	2.1217	0.0285	2.1221	0.0286	+0.9884	+0.9918	0.15	0.15
5	1.4990	0.1570	2.1245	0.1584	2.1255	0.0231	2.1255	0.0231	+0.9893	+0.9983	0.15	0.15
6	1.4507	0.1381	2.0792	0.1383	2.1282	0.0194	2.1286	0.0194	+0.9901	+0.9920	0.14	0.14
7	1.5021	0.1276	2.1414	0.1318	2.1393	0.0192	2.1394	0.0194	+0.9893	+1.0223	0.15	0.15
8	1.6096	0.1503	2.2684	0.1656	2.1486	0.0205	2.1588	0.0249	+0.9923	+1.0933	0.12	0.15
9	1.5354	0.1508	2.1826	0.1679	2.1434	0.0187	2.1472	0.0247	+0.9938	+1.1068	0.11	0.15
10	1.5324	0.1357	2.1942	0.1515	2.1584	0.0220	2.1618	0.0262	+0.9894	+1.1046	0.14	0.17
11	1.5209	0.1239	2.1873	0.1379	2.1643	0.0207	2.1664	0.0242	+0.9887	+1.1007	0.15	0.18
12	1.4855	0.1185	2.1429	0.1334	2.1591	0.0196	2.1574	0.0237	+0.9891	+1.1131	0.15	0.18
13	1.4546	0.1134	2.1102	0.1271	2.1606	0.0182	2.1556	0.0220	+0.9897	+1.1093	0.14	0.17
14	1.4637	0.1056	2.1102	0.1180	2.1502	0.0195	2.1465	0.0222	+0.9863	+1.1017	0.16	0.19
15	1.4415	0.1009	2.0867	0.1124	2.1510	0.0182	2.1452	0.0208	+0.9868	+1.0998	0.16	0.18
20	1.3919	0.0800	2.0533	0.0874	2.1689	0.0180	2.1614	0.0189	+0.9785	+1.0698	0.21	0.22
25	1.3859	0.0663	2.0288	0.0737	2.1515	0.0185	2.1428	0.0192	+0.9680	+1.0761	0.25	0.26
30	1.3980	0.0670	2.0562	0.0781	2.1721	0.0176	2.1582	0.0199	+0.9742	+1.1368	0.23	0.25
35	1.3985	0.0593	2.0543	0.0692	2.1695	0.0161	2.1558	0.0180	+0.9725	+1.1352	0.23	0.26
40	1.4082	0.0535	2.0595	0.0619	2.1626	0.0147	2.1512	0.0161	+0.9714	+1.1240	0.24	0.26
45	1.4007	0.0500	2.0523	0.0571	2.1624	0.0135	2.1516	0.0145	+0.9717	+1.1083	0.24	0.25
50	1.4529	0.0585	2.1102	0.0656	2.1621	0.0131	2.1573	0.0143	+0.9800	+1.1002	0.20	0.22

H 1

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES WARTESYSTEMS MIT ZWEI EV. VERSCHIEDENEN

ABFERTGUNGSSTELLEN (POISSON) GESCHAETZT (THEOR. WERTE=2.1381 0.7697).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0.6 MY=1.0 M=100 N= 300 P= 50 MY1=0,1 MY2=0,9 ALPHA=0.1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	1,4081	0,0000	2,1311	0,0000								
2	1,4151	0,0049	2,1113	0,0140								
3	1,2810	0,1095	1,9512	0,1310	2,2119	0,0132	2,1702	0,0247	+0,9949	+1,1905	0,10	0,19
4	1,3450	0,0991	2,0132	0,1120	2,1869	0,0143	2,1681	0,0186	+0,9919	+1,1208	0,13	0,17
5	1,3188	0,0827	1,9877	0,0924	2,1886	0,0119	2,1689	0,0149	+0,9917	+1,1088	0,13	0,16
6	1,4373	0,1282	2,0334	0,0876	2,0707	0,0432	2,0961	0,0676	+0,8702	+0,5945	0,49	0,77
7	1,5546	0,1545	2,1573	0,1371	2,1123	0,0513	2,1026	0,0582	+0,9272	+0,8224	0,37	0,42
8	1,5470	0,1354	2,1612	0,1200	2,1228	0,0459	2,1143	0,0521	+0,9238	+0,8186	0,38	0,43
9	1,5668	0,1218	2,1789	0,1080	2,1241	0,0409	2,1121	0,0463	+0,9256	+0,8204	0,38	0,43
10	1,5232	0,1172	2,1305	0,1075	2,1106	0,0384	2,1073	0,0420	+0,9338	+0,8565	0,36	0,39
11	1,4834	0,1131	2,0883	0,1057	2,1029	0,0357	2,1049	0,0382	+0,9412	+0,8794	0,34	0,36
12	1,5004	0,1050	2,0984	0,0973	2,0980	0,0330	2,0980	0,0356	+0,9406	+0,8725	0,34	0,37
13	1,4724	0,1006	2,0830	0,0911	2,1065	0,0316	2,1106	0,0351	+0,9378	+0,8494	0,35	0,39
14	1,4681	0,0935	2,0764	0,0848	2,1036	0,0295	2,1084	0,0326	+0,9375	+0,8507	0,35	0,38
15	1,4572	0,0879	2,0732	0,0792	2,1092	0,0281	2,1160	0,0313	+0,9349	+0,8428	0,36	0,40
20	1,4295	0,0718	2,0450	0,0674	2,1073	0,0229	2,1155	0,0244	+0,9404	+0,8830	0,34	0,36
25	1,3963	0,0695	2,0127	0,0680	2,1099	0,0194	2,1164	0,0199	+0,9584	+0,9371	0,29	0,29
30	1,3968	0,0646	2,0187	0,0637	2,1167	0,0173	2,1220	0,0176	+0,9625	+0,9490	0,27	0,28
35	1,4246	0,0606	2,0333	0,0574	2,1015	0,0170	2,1087	0,0180	+0,9550	+0,9043	0,30	0,31
40	1,4772	0,0766	2,0939	0,0781	2,1166	0,0169	2,1167	0,0169	+0,9764	+0,9954	0,22	0,22
45	1,5070	0,0741	2,1308	0,0774	2,1236	0,0163	2,1237	0,0164	+0,9777	+1,0223	0,21	0,21
50	1,5029	0,0689	2,1268	0,0716	2,1239	0,0149	2,1239	0,0149	+0,9781	+1,0168	0,21	0,21

H 1

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES WARTESYSTEMS MIT ZWEI EV. VERSCHIEDENEN

ABFERTGUNGSSTELLEN (POISSON) GESCHAETZT (THEOR, WERTE= 2.1381 0.7697).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0.6 MY=1.0 M=200 N= 400 P= 50 MY1=0,1 MY2=0,9 ALPHA=0.1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	1,4700	0,0000	2,0612	0,0000								
2	1,3253	0,1023	1,8962	0,1166								
3	1,4117	0,0981	2,0098	0,1210	2,1185	0,0086	2,0982	0,0242	+0,9975	+1,2303	0,07	0,20
4	1,5524	0,1424	2,1031	0,1215	2,0604	0,0363	2,0507	0,0450	+0,9542	+0,8142	0,30	0,37
5	1,7332	0,1978	2,3292	0,2244	2,0715	0,0500	2,0960	0,0542	+0,9749	+1,1061	0,22	0,24
6	1,6917	0,1691	2,3046	0,1883	2,0975	0,0458	2,1129	0,0477	+0,9700	+1,0803	0,24	0,25
7	1,6705	0,1463	2,2951	0,1617	2,1129	0,0411	2,1246	0,0423	+0,9671	+1,0689	0,25	0,26
8	1,6099	0,1400	2,2396	0,1507	2,1249	0,0368	2,1298	0,0373	+0,9696	+1,0438	0,24	0,25
9	1,5971	0,1250	2,2249	0,1347	2,1234	0,0328	2,1278	0,0333	+0,9699	+1,0448	0,24	0,25
10	1,5580	0,1185	2,1993	0,1236	2,1410	0,0326	2,1414	0,0326	+0,9647	+1,0064	0,26	0,26
11	1,5793	0,1096	2,2448	0,1204	2,1619	0,0372	2,1655	0,0375	+0,9511	+1,0451	0,31	0,31
12	1,5582	0,1025	2,2134	0,1144	2,1515	0,0352	2,1551	0,0358	+0,9515	+1,0625	0,31	0,31
13	1,5210	0,1011	2,1724	0,1127	2,1500	0,0325	2,1514	0,0332	+0,9574	+1,0672	0,29	0,29
14	1,4948	0,0972	2,1382	0,1097	2,1438	0,0308	2,1434	0,0318	+0,9599	+1,0833	0,28	0,29
15	1,4846	0,0913	2,1319	0,1026	2,1485	0,0291	2,1473	0,0299	+0,9590	+1,0778	0,28	0,29
20	1,4238	0,0837	2,0793	0,0959	2,1581	0,0248	2,1505	0,0264	+0,9659	+1,1073	0,26	0,28
25	1,4647	0,0775	2,1126	0,0833	2,1484	0,0272	2,1479	0,0272	+0,9452	+1,0167	0,33	0,33
30	1,4542	0,0670	2,1015	0,0723	2,1484	0,0231	2,1473	0,0231	+0,9477	+1,0220	0,32	0,32
35	1,4344	0,0597	2,0743	0,0644	2,1414	0,0203	2,1399	0,0204	+0,9489	+1,0234	0,32	0,32
40	1,4290	0,0566	2,0735	0,0621	2,1477	0,0185	2,1444	0,0187	+0,9546	+1,0461	0,30	0,30
45	1,4232	0,0525	2,0628	0,0574	2,1432	0,0166	2,1396	0,0168	+0,9571	+1,0476	0,29	0,29
50	1,4034	0,0513	2,0397	0,0557	2,1405	0,0153	2,1363	0,0155	+0,9614	+1,0433	0,28	0,28

H 1

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES WARTESYSTEMS MIT ZWEI EV. VERSCHIEDENEN

ABFERTGUNGSSTELLEN (POISSON) GESCHAETZT (THEOR. WERTE=4.8257 3.0884).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4.0000

LAM=0.8 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50 MY1=0.9 MY2=0.1 ALPHA=0.1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	4.5421	0.0000	5.4642	0.0000								
2	4.9658	0.2995	5.7558	0.2062								
3	4.2836	0.5917	5.0622	0.5827	4.7845	0.0617	4.7786	0.0629	+0.9944	+0.9793	0.11	0.11
4	4.1939	0.4505	5.1496	0.4435	4.9710	0.1565	4.9557	0.1604	+0.9357	+0.9212	0.35	0.36
5	3.8466	0.4758	4.7970	0.4747	4.9444	0.1271	4.9503	0.1284	+0.9635	+0.9613	0.27	0.27
6	3.6366	0.4404	4.5500	0.4553	4.9141	0.1122	4.9134	0.1122	+0.9692	+1.0020	0.25	0.25
7	3.4573	0.4124	4.3382	0.4368	4.8977	0.1000	4.8808	0.1008	+0.9735	+1.0311	0.23	0.23
8	3.3242	0.3817	4.2240	0.3968	4.9083	0.0898	4.8998	0.0900	+0.9740	+1.0126	0.23	0.23
9	3.5374	0.3944	4.3919	0.3866	4.8332	0.0889	4.8544	0.0907	+0.9732	+0.9541	0.23	0.23
10	3.5947	0.3591	4.4434	0.3514	4.8296	0.0800	4.8487	0.0818	+0.9737	+0.9528	0.23	0.23
11	3.6261	0.3278	4.5208	0.3279	4.8817	0.0856	4.8946	0.0863	+0.9654	+0.9655	0.26	0.26
12	3.5391	0.3119	4.4148	0.3172	4.8681	0.0810	4.8757	0.0812	+0.9669	+0.9835	0.26	0.26
13	3.5066	0.2896	4.3576	0.2979	4.8472	0.0786	4.8510	0.0786	+0.9646	+0.9925	0.26	0.26
14	3.5039	0.2689	4.3485	0.2768	4.8410	0.0732	4.8446	0.0732	+0.9644	+0.9927	0.26	0.26
15	3.4784	0.2522	4.3008	0.2624	4.8230	0.0717	4.8224	0.0717	+0.9620	+1.0011	0.27	0.27
20	3.4966	0.2630	4.3198	0.2850	4.8541	0.0577	4.8232	0.0599	+0.9793	+1.0614	0.20	0.21
25	3.4976	0.2153	4.3285	0.2330	4.8607	0.0478	4.8309	0.0495	+0.9787	+1.0593	0.21	0.21
30	3.6559	0.2750	4.4984	0.2895	4.8555	0.0489	4.8424	0.0500	+0.9856	+1.0379	0.17	0.17
35	3.7097	0.2616	4.5504	0.2722	4.8487	0.0429	4.8408	0.0435	+0.9875	+1.0274	0.16	0.16
40	3.9812	0.3696	4.7946	0.3650	4.8130	0.0413	4.8134	0.0419	+0.9936	+0.9813	0.11	0.11
45	3.8413	0.3341	4.6487	0.3307	4.8047	0.0372	4.8074	0.0376	+0.9937	+0.9834	0.11	0.11
50	4.1067	0.3421	4.8916	0.3323	4.7887	0.0390	4.7849	0.0408	+0.9931	+0.9645	0.12	0.12

H 1

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES WARTESYSTEMS MIT ZWEI EV. VERSCHIEDENEN

ABFERTGUNGSSTELLEN (POISSON) GESCHAETZT (THEOR. WERTE=4.4653 2.8578).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4.0000

LAM=0.8 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50 MY1=0.3 MY2=0.7 ALPHA=0.1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2.1039	0.0000	2.5344	0.0000								
2	1.9186	0.1310	2.3457	0.1335								
3	2.1257	0.1903	2.6686	0.2784	5.3794	0.0420	4.5430	0.0948	+0.9885	+1.4462	0.15	0.34
4	2.0506	0.1569	2.5397	0.2369	5.4502	0.0354	4.4891	0.0851	+0.9888	+1.4931	0.15	0.36
5	2.1201	0.1400	2.6187	0.2022	5.2935	0.0346	4.4986	0.0686	+0.9853	+1.4229	0.17	0.34
6	2.1533	0.1205	2.6414	0.1698	5.1831	0.0360	4.4881	0.0579	+0.9772	+1.3763	0.21	0.34
7	2.2142	0.1177	2.7183	0.1620	5.1289	0.0314	4.5040	0.0518	+0.9810	+1.3499	0.19	0.32
8	2.7050	0.4704	3.2391	0.5074	4.6315	0.0400	4.5341	0.0534	+0.9969	+1.0752	0.08	0.11
9	2.7198	0.4184	3.2332	0.4511	4.6076	0.0410	4.5135	0.0513	+0.9959	+1.0735	0.09	0.11
10	2.7871	0.3819	3.3065	0.4119	4.6092	0.0369	4.5194	0.0465	+0.9960	+1.0740	0.09	0.11
11	3.2427	0.5561	3.7398	0.5575	4.4963	0.0473	4.4971	0.0473	+0.9964	+0.9989	0.08	0.08
12	3.2342	0.5098	3.7346	0.5111	4.4994	0.0435	4.5003	0.0435	+0.9964	+0.9988	0.09	0.09
13	3.1735	0.4742	3.6826	0.4744	4.5064	0.0410	4.5091	0.0410	+0.9963	+0.9967	0.09	0.09
14	3.3681	0.4786	3.8621	0.4735	4.4857	0.0400	4.4947	0.0406	+0.9964	+0.9858	0.08	0.09
15	3.3020	0.4512	3.7898	0.4475	4.4795	0.0381	4.4878	0.0384	+0.9964	+0.9882	0.09	0.09
20	3.7033	0.4982	4.1563	0.4877	4.4462	0.0307	4.4531	0.0328	+0.9980	+0.9769	0.06	0.07
25	3.9861	0.4750	4.4378	0.4778	4.4509	0.0368	4.4509	0.0368	+0.9970	+1.0030	0.08	0.08
30	3.9302	0.4336	4.3928	0.4387	4.4632	0.0325	4.4626	0.0327	+0.9973	+1.0088	0.07	0.07
35	3.7602	0.3855	4.2140	0.3898	4.4563	0.0297	4.4544	0.0299	+0.9971	+1.0081	0.08	0.08
40	3.7895	0.3490	4.2395	0.3520	4.4511	0.0279	4.4500	0.0279	+0.9969	+1.0056	0.08	0.08
45	3.6865	0.3143	4.1385	0.3170	4.4535	0.0250	4.4518	0.0250	+0.9969	+1.0055	0.08	0.08
50	3.8348	0.3077	4.2745	0.3067	4.4390	0.0253	4.4401	0.0254	+0.9966	+0.9935	0.08	0.08

H 1

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES WARTESYSTEMS MIT ZWEI EV. VERSCHIEDENEN

ABFERTGUNGSSTELLEN (POISSON) GESCHAETZT (THEOR. WERTE= 4.4444 2.8444).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4.0000

LAM=0.8 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50 MY1=0.5 MY2=0.5 ALPHA=0.5

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	3.3680	0.0000	4.0256	0.0000								
2	5.4956	1.5044	6.0036	1.3986								
3	4.5915	1.2453	5.1013	1.1883	4.5373	0.0406	4.5099	0.0705	+0.9994	+0.9537	0.03	0.06
4	4.0773	1.0347	4.5428	1.0140	4.4672	0.0614	4.4655	0.0654	+0.9982	+0.9782	0.06	0.06
5	3.8336	0.8560	4.2924	0.8416	4.4557	0.0502	4.4588	0.0527	+0.9982	+0.9814	0.06	0.06
6	3.7066	0.7227	4.1704	0.7101	4.4582	0.0419	4.4638	0.0441	+0.9983	+0.9809	0.06	0.06
7	3.5215	0.6427	3.9863	0.6321	4.4561	0.0360	4.4648	0.0378	+0.9984	+0.9818	0.06	0.06
8	3.5774	0.5648	4.0581	0.5571	4.4741	0.0352	4.4807	0.0363	+0.9980	+0.9844	0.06	0.07
9	3.4363	0.5194	3.9110	0.5143	4.4681	0.0322	4.4747	0.0327	+0.9980	+0.9882	0.06	0.06
10	3.4910	0.4703	3.9758	0.4669	4.4801	0.0307	4.4849	0.0310	+0.9978	+0.9907	0.07	0.07
11	3.5329	0.4294	4.0032	0.4253	4.4645	0.0310	4.4703	0.0315	+0.9973	+0.9877	0.07	0.07
12	3.4661	0.3988	3.9457	0.3937	4.4713	0.0295	4.4796	0.0302	+0.9972	+0.9845	0.08	0.08
13	3.4702	0.3681	3.9561	0.3636	4.4778	0.0280	4.4860	0.0285	+0.9970	+0.9846	0.08	0.08
14	3.5706	0.3553	4.0666	0.3540	4.4931	0.0281	4.4960	0.0282	+0.9968	+0.9932	0.08	0.08
15	3.5821	0.3318	4.0796	0.3306	4.4948	0.0263	4.4975	0.0264	+0.9968	+0.9934	0.08	0.08
20	3.6694	0.3903	4.1512	0.3951	4.4852	0.0263	4.4818	0.0266	+0.9978	+1.0102	0.07	0.07
25	3.8625	0.3823	4.3502	0.3907	4.4905	0.0220	4.4877	0.0233	+0.9984	+1.0206	0.06	0.06
30	3.9113	0.3710	4.3772	0.3765	4.4671	0.0211	4.4659	0.0217	+0.9984	+1.0132	0.06	0.06
35	3.8574	0.3376	4.3126	0.3431	4.4573	0.0190	4.4552	0.0196	+0.9985	+1.0146	0.06	0.06
40	3.8437	0.3136	4.3041	0.3186	4.4626	0.0179	4.4604	0.0184	+0.9984	+1.0143	0.06	0.06
45	3.6846	0.2891	4.1389	0.2942	4.4593	0.0166	4.4543	0.0172	+0.9984	+1.0160	0.06	0.06
50	3.8807	0.3089	4.3264	0.3101	4.4460	0.0178	4.4457	0.0178	+0.9984	+1.0021	0.06	0.06

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN GESCHAETZT(THEOR. WERT= 1.2750).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0,6 MY=1,0 M= 50 N= 250 P= 50 FR= 2

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,0820	0,0000	1.8354	0,0000								
2	1,5383	0,3844	1.4011	0,3071								
3	1,5264	0,2565	1.3650	0,2068	1,3439	0,0216	1,3387	0,0552	+0,9945	+0,8020	0,10	0,27
4	1,6780	0,2329	1.4010	0,1582	1,2902	0,0634	1,2230	0,1084	+0,9163	+0,6224	0,40	0,69
5	1,5784	0,2065	1.3250	0,1437	1,2741	0,0520	1,2465	0,0892	+0,9324	+0,6487	0,36	0,62
6	1,5135	0,1820	1.2880	0,1244	1,2794	0,0435	1,2745	0,0786	+0,9368	+0,6402	0,35	0,63
7	1,5658	0,1634	1.3270	0,1126	1,2842	0,0376	1,2611	0,0685	+0,9425	+0,6493	0,33	0,61
8	1,4834	0,1624	1.2626	0,1154	1,2738	0,0341	1,2791	0,0623	+0,9553	+0,6791	0,30	0,54
9	1,5758	0,1686	1.3137	0,1134	1,2647	0,0317	1,2379	0,0677	+0,9600	+0,6455	0,28	0,60
10	1,5601	0,1525	1.3038	0,1025	1,2651	0,0286	1,2438	0,0612	+0,9603	+0,6453	0,28	0,60
11	1,5408	0,1378	1.2918	0,0938	1,2655	0,0261	1,2510	0,0560	+0,9609	+0,6449	0,28	0,60
12	1,5117	0,1312	1.2741	0,0877	1,2666	0,0238	1,2624	0,0525	+0,9624	+0,6433	0,27	0,60
13	1,5144	0,1211	1.2771	0,0810	1,2678	0,0220	1,2627	0,0485	+0,9623	+0,6435	0,27	0,60
14	1,5146	0,1125	1.2781	0,0752	1,2687	0,0205	1,2635	0,0450	+0,9622	+0,6435	0,27	0,60
15	1,5051	0,1054	1.2719	0,0714	1,2686	0,0191	1,2668	0,0421	+0,9625	+0,6435	0,27	0,60
20	1,4959	0,0875	1.2662	0,0597	1,2688	0,0144	1,2703	0,0348	+0,9704	+0,6467	0,24	0,58
25	1,5829	0,0810	1.3415	0,0573	1,2849	0,0145	1,2586	0,0285	+0,9675	+0,6930	0,25	0,50
30	1,5334	0,0732	1.3115	0,0528	1,2881	0,0129	1,2781	0,0255	+0,9697	+0,7001	0,24	0,48
35	1,5418	0,0647	1.3191	0,0462	1,2902	0,0114	1,2773	0,0229	+0,9689	+0,6924	0,25	0,50
40	1,5446	0,0613	1.3205	0,0441	1,2885	0,0105	1,2759	0,0219	+0,9717	+0,7181	0,21	0,44
45	1,5733	0,0642	1.3399	0,0467	1,2876	0,0099	1,2666	0,0202	+0,9774	+0,7216	0,21	0,43
50	1,5561	0,0572	1.3361	0,0434	1,2907	0,0093	1,2750	0,0192	+0,9767	+0,7163	0,21	0,44

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN
GESCHAETZT(THEOR. WERT= 1.1400).
THEUR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0,6 MY=1,0 M= 50 N= 250 P= 50 FR= 5

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF REG-KOEF		REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,0820	0,0000	1.5998	0,0000								
2	1,5383	0,3844	1.2775	0,2280								
3	1,5264	0,2565	1.2390	0,1552	1,2232	0,0256	1,2126	0,1066	+0,9863	+0,5968	0,17	0,69
4	1,6780	0,2329	1.2303	0,1166	1,1611	0,0735	1,0523	0,1602	+0,7767	+0,3889	0,63	1,37
5	1,5784	0,2065	1.1741	0,1060	1,1411	0,0604	1,0957	0,1339	+0,8214	+0,4215	0,57	1,26
6	1,5135	0,1820	1.1540	0,0902	1,1485	0,0508	1,1405	0,1188	+0,8267	+0,4097	0,56	1,32
7	1,5658	0,1634	1.1812	0,0813	1,1536	0,0438	1,1154	0,1045	+0,8425	+0,4194	0,54	1,28
8	1,4834	0,1624	1.1276	0,0870	1,1354	0,0414	1,1442	0,0953	+0,8796	+0,4714	0,48	1,09
9	1,5758	0,1686	1.1514	0,0806	1,1200	0,0401	1,0756	0,1066	+0,8674	+0,4145	0,50	1,32
10	1,5601	0,1525	1.1473	0,0726	1,1224	0,0362	1,0872	0,0965	+0,8672	+0,4131	0,50	1,33
11	1,5408	0,1398	1.1361	0,0669	1,1191	0,0330	1,0953	0,0881	+0,8697	+0,4159	0,49	1,32
12	1,5117	0,1312	1.1262	0,0620	1,1214	0,0303	1,1145	0,0828	+0,8723	+0,4125	0,49	1,34
13	1,5144	0,1211	1.1305	0,0574	1,1245	0,0282	1,1161	0,0765	+0,8714	+0,4130	0,49	1,33
14	1,5146	0,1125	1.1328	0,0534	1,1268	0,0262	1,1182	0,0710	+0,8707	+0,4131	0,49	1,33
15	1,5051	0,1054	1.1294	0,0499	1,1273	0,0245	1,1244	0,0666	+0,8712	+0,4126	0,49	1,33
20	1,4959	0,0895	1.1328	0,0437	1,1346	0,0196	1,1369	0,0542	+0,8934	+0,4361	0,45	1,24
25	1,5829	0,0800	1.1969	0,0454	1,1553	0,0210	1,1140	0,0450	+0,8860	+0,5024	0,46	0,99
30	1,5334	0,0732	1.1776	0,0417	1,1605	0,0184	1,1442	0,0402	+0,8974	+0,5116	0,44	0,96
35	1,5418	0,0647	1.1839	0,0363	1,1631	0,0168	1,1421	0,0366	+0,8862	+0,4970	0,46	1,01
40	1,5446	0,0683	1.1830	0,0394	1,1592	0,0153	1,1384	0,0354	+0,9215	+0,5321	0,39	0,90
45	1,5733	0,0632	1.1958	0,0371	1,1565	0,0148	1,1226	0,0328	+0,9166	+0,5373	0,40	0,88
50	1,5551	0,0592	1.1926	0,0344	1,1634	0,0140	1,1375	0,0311	+0,9129	+0,5304	0,41	0,91

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN
GESCHAETZT(THEOR. WERT= 1.0950),
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0,6 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50 FR=10

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,0820	0,0000	1,5006	0,0000								
2	1,5383	0,3844	1,2257	0,1944								
3	1,5264	0,2565	1,1916	0,1325	1,1782	0,0229	1,1653	0,1280	+0,9850	+0,5090	0,17	0,97
4	1,6780	0,2329	1,1716	0,1009	1,1173	0,0716	0,9937	0,1769	+0,7047	+0,3053	0,71	1,75
5	1,5784	0,2065	1,1228	0,0918	1,0961	0,0592	1,0443	0,1486	+0,7645	+0,3398	0,64	1,62
6	1,5135	0,1820	1,1101	0,0774	1,1058	0,0500	1,0966	0,1327	+0,7632	+0,3244	0,65	1,72
7	1,5658	0,1634	1,1298	0,0688	1,1082	0,0429	1,0640	0,1177	+0,7814	+0,3289	0,62	1,71
8	1,4834	0,1624	1,0797	0,0763	1,0862	0,0421	1,0962	0,1073	+0,8343	+0,3919	0,55	1,41
9	1,5758	0,1686	1,0900	0,0685	1,0660	0,0428	1,0142	0,1228	+0,7807	+0,3173	0,62	1,79
10	1,5601	0,1525	1,0881	0,0617	1,0691	0,0386	1,0280	0,1113	+0,7795	+0,3154	0,63	1,80
11	1,5408	0,1398	1,0768	0,0571	1,0637	0,0355	1,0360	0,1015	+0,7837	+0,3201	0,62	1,78
12	1,5117	0,1312	1,0696	0,0528	1,0659	0,0326	1,0579	0,0954	+0,7875	+0,3168	0,62	1,81
13	1,5144	0,1211	1,0751	0,0490	1,0705	0,0304	1,0607	0,0881	+0,7845	+0,3176	0,62	1,80
14	1,5146	0,1125	1,0778	0,0456	1,0731	0,0283	1,0632	0,0818	+0,7834	+0,3176	0,62	1,79
15	1,5051	0,1054	1,0749	0,0427	1,0733	0,0265	1,0698	0,0766	+0,7844	+0,3175	0,62	1,80
20	1,4959	0,0895	1,0845	0,0382	1,0860	0,0219	1,0886	0,0622	+0,8202	+0,3501	0,57	1,63
25	1,5829	0,0890	1,1436	0,0418	1,1084	0,0243	1,0607	0,0521	+0,8127	+0,4246	0,58	1,25
30	1,5334	0,0732	1,1275	0,0381	1,1131	0,0210	1,0942	0,0464	+0,8347	+0,4342	0,55	1,22
35	1,5418	0,0647	1,1333	0,0332	1,1159	0,0193	1,0915	0,0423	+0,8141	+0,4176	0,58	1,28
40	1,5446	0,0683	1,1313	0,0352	1,1113	0,0174	1,0867	0,0415	+0,8699	+0,4487	0,49	1,18
45	1,5733	0,0632	1,1423	0,0334	1,1090	0,0169	1,0690	0,0384	+0,8621	+0,4548	0,51	1,15
50	1,5551	0,0592	1,1424	0,0310	1,1177	0,0161	1,0873	0,0364	+0,8555	+0,4481	0,52	1,17

M 2

ES WIRD DIE MITTLERE [illegible] SCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT 4X FREIHEITSGRADEN
GESCHAETZT(THEOR. WERT= [illegible])
THEOR. WERT DES MITTELWERTES D/N/L = 1,5000

LAM=0.6 MY=1. K= 5 N= 250 P= 50 FR=20

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF REG-KOEF		REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,0820	0,0000	1.4358	[illegible]								
2	1,5383	0,3844	1.1953	[illegible]								
3	1,5264	0,2565	1.1657	[illegible]	1.1540	0,0198	1.1393	0,1436	+[illegible]	+0,4453	0,17	1,24
4	1,6780	0,2329	1.1404	[illegible]	1.0957	0,0681	0,9624	0,1873	+[illegible]	+0,2506	0,76	2,09
5	1,5784	0,2065	1.0948	[illegible]	1.0722	0,0569	1.0164	0,1575	+0,7237	+0,2890	0,69	1,91
6	1.5135	0,1820	1,0888	[illegible]	1,0852	0,0487	1,0753	0,1418	+0,7081	+0,2683	0,71	2,06
7	1,5658	0,1634	1.1022	[illegible]	1,0846	0,0417	1.0363	0,1268	+0,7227	+0,2672	0,69	2,10
8	1,4834	0,1624	1.0539	[illegible]	1,0595	0,0424	1.0705	0,1154	+0,7919	+0,3389	0,61	1,66
9	1.5758	0,1686	1.0592	[illegible]	1.0392	0,0432	0,9833	0,1315	+0,7172	+0,2636	0,70	2,12
10	1,5601	0,1525	1.0579	[illegible]	1.0421	0,0390	0,9978	0,1191	+0,7157	+0,2619	0,70	2,13
11	1,5408	0,1398	1.0459	[illegible]	1.0349	0,0360	1.0051	0,1085	+0,7210	+0,2681	0,69	2,09
12	1,5117	0,1312	1.0401	[illegible]	1.0370	0,0331	1.0284	0,1019	+0,7244	+0,2650	0,69	2,12
13	1,5144	0,1211	1.0466	[illegible]	1,0428	0,0310	1.0322	0,0942	+0,7201	+0.2660	0,69	2,10
14	1,5146	0,1125	1.0490	[illegible]	1.0451	0,0289	1.0344	0,0875	+0,7191	+0,2661	0,69	2,10
15	1,5051	0,1054	1.0459	[illegible]	1.0445	0,0270	1.0408	0,0819	+0,7210	+0,2666	0,69	2,10
20	1,4959	0,0895	1.0596	[illegible]	1.0609	0,0227	1.0637	0,0665	+0,7663	+0,3023	0,64	1,88
25	1,5829	0,0800	1.1150	[illegible]	1.0835	0,0264	1.0322	0,0562	+0,7549	+0,3803	0,66	1,39
30	1,5334	0,0732	1.1009	[illegible]	1.0880	0,0225	1.0676	0,0501	+0,7841	+0,3886	0,62	1,38
35	1,5418	0,0647	1.1062	[illegible]	1.0907	0,0208	1.0644	0,0457	+0,7550	+0,3706	0,66	1,44
40	1,5446	0,0683	1.1035	[illegible]	1,0859	0,0186	1.0590	0,0453	+0,8226	+0,3948	0,57	1,38
45	1,5733	0,0632	1.1134	[illegible]	1.0840	0,0181	1.0401	0,0420	+0,8142	+0,4014	0,58	1,35
50	1,5551	0,0592	1.1156	[illegible]	1.0938	0,0172	1.0605	0,0397	+0,8053	+0,3954	0,59	1,37

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN GESCHAETZT(THEOR. WERT= 1.0650),
THEUR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0.6 MY=1.0 M= 50 N= 250 R= 50 FR=30

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2.0820	0.0000	1.4098	0.0000								
2	1.5383	0.3844	1.1833	0.1601								
3	1.5264	0.2565	1.1567	0.1089	1.1457	0.0176	1.1304	0.1500	+0.9869	+0.4191	0.16	1,38
4	1.6780	0.2329	1.1288	0.0852	1.0884	0.0667	0.9508	0.1919	+0.6215	+0.2274	0.78	2,25
5	1.5784	0.2065	1.0847	0.0788	1.0637	0.0562	1.0062	0.1613	+0.7014	+0.2676	0.71	2,05
6	1.5135	0.1820	1.0814	0.0657	1.0781	0.0484	1.0679	0.1458	+0.6773	+0.2445	0.74	2,22
7	1.5658	0.1634	1.0921	0.0572	1.0762	0.0415	1.0262	0.1308	+0.6883	+0.2410	0.73	2,29
8	1.4834	0.1624	1.0445	0.0670	1.0497	0.0429	1.0610	0.1190	+0.7681	+0.3168	0.64	1,78
9	1.5758	0.1686	1.0484	0.0597	1.0300	0.0432	0.9726	0.1346	+0.6889	+0.2438	0.72	2,26
10	1.5601	0.1525	1.0472	0.0537	1.0326	0.0390	0.9871	0.1220	+0.6876	+0.2422	0.73	2,27
11	1.5408	0.1398	1.0347	0.0503	1.0245	0.0362	0.9939	0.1111	+0.6934	+0.2492	0.72	2,21
12	1.5117	0.1312	1.0295	0.0468	1.0267	0.0333	1.0179	0.1044	+0.6963	+0.2459	0.72	2,25
13	1.5144	0.1211	1.0363	0.0433	1.0328	0.0313	1.0220	0.0964	+0.6914	+0.2470	0.72	2,23
14	1.5146	0.1125	1.0387	0.0402	1.0351	0.0291	1.0241	0.0895	+0.6904	+0.2470	0.72	2,23
15	1.5051	0.1054	1.0353	0.0377	1.0340	0.0272	1.0302	0.0838	+0.6928	+0.2479	0.72	2,22
20	1.4959	0.0875	1.0506	0.0343	1.0518	0.0232	1.0547	0.0681	+0.7423	+0.2841	0.67	1,99
25	1.5829	0.0800	1.1047	0.0400	1.0745	0.0274	1.0218	0.0578	+0.7286	+0.3640	0.68	1,43
30	1.5334	0.0732	1.0912	0.0357	1.0788	0.0232	1.0578	0.0515	+0.7635	+0.3715	0.65	1,44
35	1.5418	0.0647	1.0964	0.0313	1.0816	0.0215	1.0546	0.0470	+0.7280	+0.3529	0.69	1,50
40	1.5446	0.0683	1.0933	0.0319	1.0767	0.0192	1.0487	0.0469	+0.7984	+0.3726	0.60	1,47
45	1.5733	0.0632	1.1024	0.0303	1.0746	0.0186	1.0291	0.0434	+0.7899	+0.3791	0.61	1,43
50	1.5551	0.0592	1.1055	0.0284	1.0849	0.0177	1.0504	0.0411	+0.7800	+0.3737	0.63	1,45

H 3

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/D/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT= 1.0500),
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1.5000

LAM=0.6 MY=1.0 R= 5 N= 251 P= 50

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	AJREG-METH MITTELW	AJREG-METH STANDAB	BJDIFF-METH MITTELW	BJDIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,0820	0,0010	1.3483	0.0000								
2	1,5383	0,3844	1.1762	0.1217								
3	1,5264	0,2565	1.1558	0.0828	1.1474	0,0136	1,1294	0,1753	+0,9865	+0,3186	0,16	2,12
4	1,6780	0,2329	1.1151	0.0714	1.0916	0,0645	0,9371	0,2122	+0,4302	+0,1319	0,90	2,97
5	1,5784	0,2065	1.0701	0.0699	1.0551	0,0576	0,9917	0,1767	+0,5655	+0,1913	0,82	2,53
6	1,5135	0,1820	1.0768	0.0585	1.0746	0,0507	1,0633	0,1611	+0,4981	+0,1602	0,87	2,75
7	1,5658	0,1634	1.0741	0.0502	1.0648	0,0446	1,0083	0,1472	+0,4606	+0,1416	0,89	2,93
8	1,4834	0,1624	1.0268	0.0624	1.0307	0,0488	1,0433	0,1329	+0,6225	+0,2391	0,78	2,13
9	1,5758	0,1686	1.0244	0.0555	1.0116	0,0477	0,9486	0,1481	+0,5119	+0,1685	0,86	2,67
10	1,5601	0,1525	1.0219	0.0500	1.0118	0,0429	0,9619	0,1339	+0,5135	+0,1684	0,86	2,68
11	1,5408	0,1398	1.0085	0.0472	1.0013	0,0402	0,9678	0,1218	+0,5256	+0,1775	0,85	2,58
12	1,5117	0,1312	1.0053	0.0434	1.0032	0,0369	0,9936	0,1144	+0,5276	+0,1746	0,85	2,64
13	1,5144	0,1211	1.0126	0.0407	1.0100	0,0347	0,9982	0,1057	+0,5232	+0,1757	0,85	2,60
14	1,5146	0,1125	1.0140	0.0378	1.0114	0,0322	0,9994	0,0981	+0,5230	+0,1758	0,85	2,60
15	1,5051	0,1054	1.0089	0.0356	1.0080	0,0302	1,0038	0,0917	+0,5281	+0,1785	0,85	2,57
20	1,4959	0,0895	1.0350	0.0335	1.0360	0,0268	1,0391	0,0745	+0,5986	+0,2238	0,80	2,23
25	1,5829	0,0800	1.0850	0.0414	1.0892	0,0330	1,0021	0,0642	+0,6023	+0,3116	0,80	1,55
30	1,5334	0,0732	1.0720	0.0360	1.0615	0,0277	1,0386	0,0573	+0,6396	+0,3146	0,77	1,59
35	1,5418	0,0647	1.0772	0.0318	1.0649	0,0255	1,0354	0,0523	+0,5982	+0,2941	0,80	1,64
40	1,5446	0,0683	1.0720	0.0302	1.0590	0,0227	1,0275	0,0534	+0,6599	+0,2922	0,75	1,77
45	1,5733	0,0632	1.0785	0.0289	1.0566	0,0219	1,0052	0,0495	+0,6523	+0,2984	0,76	1,71
50	1,5551	0,0592	1.0857	0.0274	1.0693	0,0210	1,0306	0,0466	+0,6414	+0,2966	0,77	1,70

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN GESCHAETZT(THEOR. WERT= 3,2000),
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4,0000

LAM=0,8 MY=1,0 M= 0 N= 200 P= 50 FR= 2

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	4,1494	0,0000	3,7531	0,0000								
2	3,0207	0,7981	2,7451	0,7128								
3	3,2290	0,5586	2,8264	0,4798	3,4790	0,0815	3,5973	0,1183	+0,9855	+0,8465	0,17	0,25
4	3,3796	0,4388	2,9460	0,3745	3,4684	0,0614	3,5665	0,0927	+0,9864	+0,8419	0,16	0,25
5	3,6960	0,4509	3,0233	0,3674	3,2077	0,1406	3,3273	0,2264	+0,8894	+0,6065	0,46	0,74
6	3,6272	0,3809	2,9448	0,2960	3,1763	0,1217	3,3176	0,1888	+0,8892	+0,6210	0,46	0,71
7	3,5998	0,3275	2,9485	0,2281	3,1952	0,1061	3,3487	0,1644	+0,8853	+0,6165	0,47	0,72
8	3,5744	0,2876	2,9766	0,2013	3,2339	0,1014	3,4022	0,1523	+0,8639	+0,6047	0,50	0,76
9	3,7764	0,3188	3,1723	0,2570	3,3360	0,1059	3,3959	0,1355	+0,9112	+0,7347	0,41	0,53
10	3,6224	0,3220	3,0530	0,2575	3,3335	0,0954	3,4306	0,1263	+0,9288	+0,7429	0,37	0,49
11	3,7677	0,3238	3,1363	0,2472	3,3017	0,0893	3,3686	0,1292	+0,9324	+0,7119	0,36	0,52
12	3,6714	0,3106	3,0524	0,2454	3,2979	0,0881	3,3810	0,1190	+0,9384	+0,7259	0,35	0,49
13	3,7226	0,2885	3,0725	0,2226	3,286	0,0768	3,3379	0,1106	+0,9389	+0,7243	0,35	0,50
14	3,8791	0,3173	3,2155	0,2495	3,3084	0,0727	3,3354	0,1071	+0,9566	+0,7522	0,29	0,43
15	3,7953	0,3070	3,1543	0,2462	3,3086	0,0678	3,3590	0,1023	+0,9593	+0,7507	0,28	0,43
20	3,7660	0,2498	3,165	0,1965	3,3429	0,0577	3,3493	0,0831	+0,9566	+0,7604	0,29	0,42
25	3,7111	0,3037	3,1210	0,2241	3,3223	0,0499	3,4126	0,1067	+0,9740	+0,6944	0,23	0,48
30	4,0012	0,3369	3,4156	0,2948	3,4145	0,0418	3,4144	0,0967	+0,9808	+0,8459	0,25	0,33
35	3,8890	0,3017	3,3330	0,2015	3,4257	0,0372	3,4446	0,0873	+0,9613	+0,8363	0,28	0,33
40	3,8773	0,2866	3,3232	0,2356	3,4389	0,0641	3,4566	0,0774	+0,9654	+0,8451	0,26	0,32
45	3,8491	0,2697	3,305	0,2382	3,4549	0,0585	3,4758	0,0697	+0,9693	+0,8592	0,25	0,29
50	4,0008	0,2706	3,4613	0,2367	3,4630	0,0565	3,4805	0,0679	+0,9732	+0,8643	0,23	0,28

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN
GESCHAETZT (THEOR. WERT= 3.2).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4,0000

LAM=0,8 MY=1,0 M= 50 N= 250 P= 50 FR= 2

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	4,7933	0,0000	4.2974	0,0000								
2	3,3907	0,9918	3.1005	0,8464								
3	3,5467	0,6733	3.1116	0,5043	3,4857	0,0978	3,5649	0,1530	+0,9849	+0,8254	0,17	0,27
4	4,0749	0,6814	3.2611	0,4426	3,2176	0,1980	3,1862	0,3474	+0,8944	+0,5810	0,45	0,78
5	3,8948	0,5684	3.0845	0,3877	3,1490	0,1700	3,1897	0,2780	+0,8988	+0,6131	0,44	0,72
6	3,7088	0,5032	3.0001	0,3522	3,1734	0,1439	3,2914	0,2495	+0,9013	+0,5949	0,43	0,75
7	3,7150	0,4314	3.0116	0,2849	3,1812	0,1236	3,2966	0,2139	+0,9011	+0,5951	0,43	0,75
8	3,4488	0,4522	2.8031	0,3165	3,1626	0,1150	3,3543	0,1948	+0,9317	+0,6521	0,36	0,62
9	3,7199	0,4763	2.9799	0,3270	3,1626	0,1022	3,2600	0,1947	+0,9499	+0,6522	0,31	0,60
10	3,8131	0,4377	3.0217	0,2970	3,1421	0,0936	3,2086	0,1819	+0,9490	+0,6439	0,32	0,61
11	3,7390	0,4041	2.9856	0,2722	3,1525	0,0858	3,2467	0,1693	+0,9490	+0,6390	0,32	0,62
12	3,6372	0,3831	2.9186	0,2576	3,1510	0,0787	3,2815	0,1587	+0,9522	+0,6403	0,31	0,62
13	3,7619	0,3734	3.0179	0,2562	3,1742	0,0748	3,2560	0,1485	+0,9565	+0,6563	0,29	0,58
14	3,7865	0,3475	3.0429	0,2391	3,1834	0,0699	3,2564	0,1379	+0,9563	+0,6580	0,29	0,58
15	3,7688	0,3248	3.0233	0,2240	3,1757	0,0657	3,2545	0,1287	+0,9560	+0,6593	0,29	0,57
20	3,7225	0,3031	3.0332	0,2422	3,2291	0,0602	3,3107	0,1076	+0,9626	+0,7057	0,27	0,48
25	4,1982	0,4444	3.4393	0,3080	3,2772	0,0588	3,2410	0,1002	+0,9872	+0,8175	0,16	0,27
30	4,0060	0,3888	3.2881	0,3166	3,2833	0,0544	3,2821	0,0942	+0,9851	+0,8022	0,17	0,30
35	3,9630	0,3371	3.2737	0,2749	3,3034	0,0477	3,3107	0,0817	+0,9848	+0,8032	0,17	0,30
40	3,9754	0,3158	3.2970	0,2548	3,3165	0,0504	3,3216	0,0831	+0,9802	+0,7907	0,20	0,33
45	3,9030	0,2867	3.2316	0,2313	3,3083	0,0459	3,3286	0,0755	+0,9801	+0,7908	0,20	0,33
50	3,9097	0,2665	3.2391	0,2148	3,3105	0,0431	3,3294	0,0707	+0,9797	+0,7898	0,20	0,33

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN
GESCHAETZT(THEOR. WERT= 3.2000).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4.0000

LAM=0.8 MY=1.0 M=100 N= 300 P= 50 FR= 2

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	4.4315	0.0000	3.9385	0.0000								
2	3.8716	0.3959	3.3772	0.3969								
3	4.1967	0.3743	3.4523	0.2716	3.3314	0.1444	3.2556	0.2042	+0.8469	+0.6145	0.53	0.75
4	3.9846	0.3355	3.2335	0.2782	3.2449	0.1259	3.2489	0.1532	+0.8918	+0.7395	0.45	0.55
5	3.7366	0.3482	3.0936	0.2553	3.2696	0.1051	3.3570	0.1561	+0.9114	+0.6683	0.41	0.61
6	3.9988	0.3762	3.3563	0.3206	3.3572	0.1070	3.3575	0.1301	+0.9426	+0.8033	0.33	0.41
7	3.6828	0.4354	3.1050	0.3600	3.3586	0.0917	3.4222	0.1266	+0.9670	+0.7997	0.25	0.35
8	3.5494	0.4009	2.9649	0.3412	3.3362	0.0856	3.4155	0.1109	+0.9680	+0.8239	0.25	0.33
9	3.4016	0.3826	2.8439	0.3240	3.3365	0.0761	3.4423	0.1018	+0.9720	+0.8232	0.23	0.31
10	3.7154	0.4552	3.0263	0.3391	3.2312	0.0875	3.3109	0.1547	+0.9661	+0.7198	0.26	0.46
11	3.8967	0.4485	3.1518	0.3307	3.2257	0.0797	3.2551	0.1504	+0.9705	+0.7156	0.24	0.45
12	3.8742	0.4117	3.1134	0.3053	3.2037	0.0761	3.2391	0.1387	+0.9685	+0.7183	0.25	0.45
13	3.8548	0.3805	3.0883	0.2629	3.1929	0.0710	3.2336	0.1281	+0.968	+0.7197	0.25	0.45
14	3.7291	0.3735	3.0030	0.2752	3.1968	0.0661	3.2739	0.1252	+0.9707	+0.7154	0.24	0.45
15	3.7860	0.3529	3.0373	0.2590	3.1898	0.0628	3.2513	0.1188	+0.9709	+0.7127	0.24	0.46
20	3.8581	0.2872	3.1536	0.2200	3.2588	0.0555	3.2955	0.0927	+0.9677	+0.7414	0.25	0.42
25	3.7333	0.2691	3.0472	0.1917	3.2362	0.0531	3.3139	0.0926	+0.961	+0.7084	0.28	0.48
30	3.7685	0.2287	3.0896	0.1765	3.2506	0.0453	3.3212	0.0787	+0.964	+0.7187	0.27	0.46
35	3.9126	0.2676	3.2156	0.2183	3.2852	0.0461	3.3429	0.0711	+0.9775	+0.7979	0.21	0.33
40	3.9687	0.2473	3.2737	0.1985	3.2982	0.0447	3.3550	0.0700	+0.9748	+0.7820	0.23	0.35
45	4.0179	0.2373	3.2675	0.1850	3.2942	0.0455	3.2496	0.0737	+0.9653	+0.7556	0.25	0.40
50	4.0533	0.2193	3.3164	0.1797	3.2758	0.0439	3.2832	0.0774	+0.9675	+0.7664	0.25	0.39

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN
GESCHAETZT(THEOR. WERT= 3.2000).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4,0000

LAM=0,8 MY=1,0 M=200 N= 400 P= 50 FR= 2

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,9127	0,0000	2,5291	0,0000								
2	3,0607	0,1046	2,5957	0,0471								
3	3,1932	0,1287	2,6219	0,0380	2,8414	0,0148	3,4287	0,0948	+0,9213	+0,2721	0,39	2,50
4	3,2445	0,1003	2,7089	0,0805	3,1025	0,0585	3,4644	0,0775	+0,6874	+0,5210	0,73	0,96
5	2,9835	0,2484	2,4894	0,2067	3,3063	0,0533	3,5058	0,0723	+0,9661	+0,8037	0,26	0,35
6	2,9458	0,2099	2,4207	0,1833	3,2968	0,0563	3,4749	0,0665	+0,9517	+0,8310	0,31	0,36
7	3,1017	0,2337	2,5622	0,2046	3,3357	0,0490	3,4605	0,0586	+0,9709	+0,8610	0,24	0,29
8	3,1754	0,2183	2,7198	0,2319	3,5598	0,0937	3,5444	0,0937	+0,9147	+0,9944	0,40	0,40
9	3,2651	0,2076	2,7732	0,2122	3,4555	0,0888	3,5081	0,0900	+0,9083	+0,9284	0,42	0,42
10	3,3258	0,1955	2,8167	0,1954	3,4302	0,0807	3,4909	0,0826	+0,9106	+0,9099	0,41	0,42
11	3,2476	0,1927	2,7642	0,1845	3,4220	0,0752	3,5167	0,0790	+0,9131	+0,8741	0,41	0,43
12	3,4348	0,2517	2,9353	0,2354	3,4405	0,0691	3,5004	0,0741	+0,9559	+0,8940	0,29	0,31
13	3,4827	0,2369	2,9498	0,2177	3,4008	0,0692	3,4671	0,0755	+0,9482	+0,8718	0,32	0,35
14	3,5091	0,2214	2,9667	0,2028	3,3931	0,0645	3,4575	0,0707	+0,9481	+0,8687	0,32	0,35
15	3,5320	0,2078	2,9714	0,1894	3,3745	0,0619	3,4394	0,0683	+0,9451	+0,8612	0,33	0,36
20	3,4094	0,1795	2,8894	0,1545	3,3647	0,0548	3,4800	0,0651	+0,9349	+0,8047	0,35	0,42
25	3,6507	0,2593	3,0906	0,2213	3,3824	0,0453	3,4399	0,0623	+0,9788	+0,8354	0,20	0,28
30	3,6726	0,2276	3,0984	0,1925	3,3689	0,0413	3,4258	0,0572	+0,9767	+0,8262	0,21	0,30
35	3,7338	0,2228	3,1241	0,1837	3,3389	0,0379	3,3904	0,0573	+0,9785	+0,8068	0,21	0,31
40	3,7129	0,1963	3,1119	0,1620	3,3429	0,0359	3,3990	0,0525	+0,9752	+0,8047	0,22	0,32
45	3,9820	0,3548	3,2514	0,2373	3,2632	0,0473	3,2694	0,1310	+0,9799	+0,6555	0,20	0,55
50	3,8754	0,3235	3,1799	0,2165	3,2616	0,0433	3,3045	0,1195	+0,9798	+0,6557	0,20	0,55

H 2

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN GESCHAETZT(THEOR. WERT= 6.9750).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 9.0000

LAM=0.9 MY=1.0 M=200 N= 400 P= 50 FR= 2

K	POISSON MITTELW	POISSON STANDAB	ERLANG MITTELW	ERLANG STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH. MITTELW	B)DIFF-METH. STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	7.0480	0.0000	5.3733	0.0000								
2	7.9461	0.6350	6.2090	0.5909								
3	11.0226	2.5474	6.8567	0.6595	6.3900	0.3006	4.8340	1.9834	+0.8901	+0.2304	0.46	0.81
4	10.1051	2.0692	6.8682	0.4947	6.6532	0.2874	5.7632	1.6912	+0.8139	+0.1946	0.58	0.42
5	8.6993	2.0788	5.9726	0.8935	6.0798	0.4992	6.2733	1.4278	+0.8294	+0.3565	0.56	1.60
6	7.9735	1.8547	5.5005	0.8603	5.9049	0.4541	6.5270	1.2122	+0.8494	+0.3940	0.53	1.41
7	7.8471	1.5940	5.5589	0.7394	6.0078	0.4018	6.7118	1.0530	+0.8395	+0.3894	0.54	1.42
8	7.9267	1.3958	5.9017	0.7221	6.3310	0.4566	6.9750	0.9537	+0.7747	+0.4005	0.63	1.32
9	7.8112	1.2453	5.8703	0.6426	6.3453	0.4061	7.0591	0.8515	+0.7750	+0.3995	0.63	1.33
10	7.5813	1.1427	5.7505	0.5894	6.3230	0.3664	7.1691	0.7734	+0.7852	+0.4040	0.62	1.31
11	7.2359	1.0898	5.5733	0.5618	6.3035	0.3349	7.3374	0.7211	+0.8029	+0.4139	0.60	1.28
12	7.0730	1.0111	5.5612	0.5151	6.3433	0.3114	7.4882	0.6767	+0.7966	+0.4058	0.60	1.31
13	7.3772	0.9780	5.8255	0.5390	6.5512	0.3151	7.4484	0.6258	+0.8113	+0.4472	0.58	1.10
14	7.6525	0.9461	6.0191	0.5342	6.6488	0.2998	7.3666	0.5864	+0.8277	+0.4673	0.56	1.00
15	7.5455	0.8891	5.9294	0.5300	6.6164	0.2824	7.3839	0.5476	+0.8298	+0.4723	0.56	1.00
20	7.1972	0.7251	5.8245	0.4438	6.7387	0.2362	7.6073	0.4218	+0.8466	+0.5182	0.53	.93
25	8.2178	1.3237	6.9750	1.2421	7.6791	0.3205	7.7522	0.3435	+0.9661	+0.9066	0.26	.26
30	8.4517	1.1502	7.1947	1.0783	7.6921	0.2726	7.7429	0.2928	+0.9675	+0.9071	0.25	.27
35	8.6844	1.0442	7.3219	0.9766	7.6082	0.2379	7.6375	0.2569	+0.9699	+0.9071	0.24	0.26
40	8.6529	0.9813	7.3608	0.9062	7.6072	0.218	7.7079	0.2405	+0.9706	+0.8964	0.24	.27
45	9.1604	1.1490	7.6677	0.9599	7.5392	0.236	7.5074	0.3280	+0.9667	+0.8017	0.25	.34
50	9.0556	1.0695	7.6845	0.9093	7.6388	0.2364	7.6288	0.3542	+0.9655	+0.8210	0.26	.35

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/H2/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT = 1.6714).
THEOR. WERT DES FEHLERMASSES M/M/1 = 1,5000

LAM=1.6 MY=1.0 [illegible] N= 300 P= 50 ALPHA=0,3

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF REG-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	1,2337	0,0000	1,5104	0,0000								
2	1,3180	0,0576	1,3668	0,1016								
3	1,2601	0,0617	1,3403	0,0741	1,2355	0,0658	1,5802	0,1104	-0,3794	-0,4369	0,93	1,55
4	1,2531	0,0497	1,3398	0,0533	1,2340	0,0494	1,5867	0,0830	-0,3752	-0,4284	0,93	1,56
5	1,3168	0,0631	1,4551	0,1016	1,6030	0,0804	1,6383	0,0809	+0,6939	+1,1376	0,72	0,72
6	1,3528	0,0656	1,4773	0,0952	1,6250	0,0686	1,6246	0,0686	+0,6935	+1,0069	0,72	0,72
7	1,4272	0,0889	1,6631	0,1904	1,8016	0,0875	1,7359	0,1187	+0,8880	+1,9013	0,46	0,62
8	1,3679	0,0955	1,6029	0,1758	1,8146	0,0864	1,7349	0,1039	+0,8710	+1,6037	0,49	0,59
9	1,4185	0,0974	1,6942	0,1785	1,8289	0,0772	1,7757	0,1000	+0,9015	+1,6525	0,43	0,56
10	1,3792	0,0952	1,6386	0,1691	1,8339	0,0700	1,7594	0,0913	+0,9103	+1,6160	0,41	0,54
11	1,4423	0,1054	1,7287	0,1761	1,8184	0,0643	1,7864	0,0869	+0,9309	+1,5545	0,37	0,49
12	1,5102	0,1165	1,7814	0,1691	1,7680	0,0724	1,7712	0,0810	+0,9037	+1,3119	0,43	0,48
13	1,4707	0,1140	1,7424	0,1805	1,7797	0,0678	1,7716	0,0748	+0,9064	+1,2761	0,42	0,47
14	1,4505	0,1077	1,7209	0,1505	1,7837	0,0631	1,7704	0,0694	+0,9078	+1,2690	0,42	0,46
15	1,4506	0,1005	1,7144	0,1406	1,7771	0,0593	1,7638	0,0651	+0,9068	+1,2689	0,42	0,46
20	1,5258	0,1618	1,7665	0,2026	1,7351	0,0499	1,7406	0,0607	+0,9691	+1,2131	0,25	0,30
25	1,4883	0,1321	1,7347	0,1689	1,7491	0,0491	1,7464	0,0573	+0,9568	+1,2238	0,29	0,34
30	1,4686	0,1109	1,7388	0,1417	1,7770	0,0437	1,7702	0,0498	+0,9512	+1,2153	0,31	0,35
35	1,5131	0,1033	1,7583	0,1288	1,7428	0,0412	1,7452	0,0452	+0,9475	+1,1808	0,32	0,35
40	1,5044	0,0912	1,7175	0,1146	1,7124	0,0406	1,7132	0,0436	+0,9350	+1,1745	0,35	0,38
45	1,5165	0,0820	1,7203	0,1027	1,7011	0,0369	1,7039	0,0394	+0,9333	+1,1686	0,36	0,38
50	1,5042	0,0741	1,7196	0,0948	1,7147	0,0394	1,7154	0,0412	+0,9097	+1,1631	0,42	0,43

H 4

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/H2/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT = 3,1000),
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0,6 MY=1,0 M=100 N= 300 P= 50 ALPHA=0,1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	1,2337	0,0000	3,6998	0,0000								
2	1,3180	0,0596	2,6588	0,7360								
3	1,2601	0,0617	3,2915	0,7125	0,5277	0,0435	3,5315	0,7741	-0,9981	-11,5197	0,06	1,09
4	1,2531	0,0467	2,9085	0,6289	0,3383	0,3991	3,1554	0,6657	-0,7729	-10,4105	0,63	1,06
5	1,3168	0,0681	2,9164	0,5032	2,3579	0,4584	3,0996	0,5349	-0,4123	-3,0477	0,91	1,06
6	1,3528	0,0656	3,2552	0,5211	3,2673	0,5210	3,4024	0,5245	+0,0104	+0,0824	1,00	1,01
7	1,4272	0,0889	3,5189	0,5090	3,6763	0,4714	3,5917	0,4825	+0,3774	+2,1609	0,93	0,95
8	1,3679	0,0955	3,4035	0,4583	3,6794	0,4125	3,5355	0,4255	+0,4355	+2,0895	0,90	0,93
9	1,4185	0,0974	3,6516	0,4697	3,8769	0,3849	3,7331	0,4215	+0,5731	+2,7647	0,82	0,90
10	1,3792	0,0952	3,5228	0,4400	3,8663	0,3469	3,6436	0,3888	+0,6153	+2,8429	0,79	0,86
11	1,4423	0,1054	3,7609	0,4600	3,9424	0,3187	3,8186	0,3908	+0,7211	+3,1458	0,69	0,85
12	1,5102	0,1165	3,8983	0,4417	3,8697	0,2983	3,8881	0,3644	+0,7374	+2,7960	0,68	0,82
13	1,4707	0,1140	3,8055	0,4173	3,8859	0,2759	3,8348	0,3402	+0,7504	+2,7466	0,66	0,82
14	1,4505	0,1077	3,6897	0,4033	3,8300	0,2624	3,7392	0,3291	+0,7593	+2,8444	0,65	0,82
15	1,4506	0,1005	3,5731	0,3929	3,7133	0,2698	3,6224	0,3272	+0,7269	+2,8425	0,69	0,83
20	1,5258	0,1618	3,2467	0,3548	3,2153	0,2951	3,2209	0,2972	+0,5550	+1,2168	0,83	0,84
25	1,4883	0,1321	3,3062	0,3387	3,3219	0,2889	3,3179	0,2923	+0,5220	+1,3383	0,85	0,86
30	1,4686	0,1109	3,2557	0,2954	3,2967	0,2518	3,2871	0,2540	+0,4984	+1,3052	0,87	0,87
35	1,5131	0,1083	3,2065	0,2595	3,1901	0,2251	3,1934	0,2266	+0,4976	+1,2497	0,87	0,87
40	1,5044	0,0912	3,2688	0,2468	3,2625	0,2176	3,2637	0,2191	+0,4720	+1,2771	0,88	0,89
45	1,5165	0,0820	3,2459	0,2272	3,2262	0,2049	3,2295	0,2055	+0,4321	+1,1973	0,90	0,90
50	1,5042	0,0741	3,1255	0,2164	3,1202	0,1949	3,1213	0,1959	+0,4349	+1,2697	0,90	0,91

N 4

ES WIRD DIE MITTELE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/H2/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT = 4,6095).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4,0000

LAM=0,8 MY=1,0 M=100 N= 300 P= 50 ALPHA=0,3

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,9160	0,0000	2,9227	0,0000								
2	2,5151	0,2805	2,7098	0,1536								
3	2,3555	0,2296	2,6889	0,1018	3,3502	0,0429	4,3334	0,1438	+0,9068	+0,4021	0,42	1,41
4	2,3138	0,1759	2,6611	0,0801	3,3579	0,0335	4,3473	0,1085	+0,9081	+0,4133	0,42	1,36
5	2,8146	0,4694	3,2220	0,5058	4,4747	0,0986	4,4075	0,1022	+0,9808	+1,0567	0,20	0,20
6	2,8716	0,3947	3,2111	0,4216	4,3790	0,1044	4,3395	0,1053	+0,9688	+1,0350	0,25	0,25
7	3,4922	0,6698	4,0952	0,8947	4,7676	0,1446	4,6030	0,2601	+0,9869	+1,3242	0,16	0,29
8	3,2759	0,6175	3,9218	0,7995	4,8400	0,1612	4,6459	0,2311	+0,9795	+1,2681	0,20	0,29
9	3,5003	0,5882	4,1686	0,7478	4,7915	0,1471	4,6684	0,2065	+0,9805	+1,2464	0,20	0,28
10	3,3460	0,5493	3,9727	0,6982	4,7889	0,1324	4,6266	0,1900	+0,9818	+1,2481	0,19	0,27
11	3,5423	0,5333	4,2060	0,6726	4,7739	0,1208	4,6637	0,1763	+0,9837	+1,2408	0,18	0,26
12	3,4551	0,4959	4,1022	0,6245	4,7775	0,1108	4,6471	0,1624	+0,9841	+1,2394	0,18	0,26
13	3,4985	0,4597	4,9795	1,0212	5,6794	0,7945	5,4810	0,8151	+0,6282	+1,3956	0,78	0,80
14	3,5663	0,4318	4,9480	0,9487	5,5349	0,7475	5,3818	0,7629	+0,6158	+1,3531	0,79	0,80
15	3,4610	0,4156	4,7669	0,9026	5,5082	0,6986	5,3060	0,7158	+0,6332	+1,3751	0,77	0,79
20	4,1313	0,5601	5,3851	0,8319	5,2374	0,5431	5,2538	0,5476	+0,7575	+1,1252	0,65	0,66
25	3,9473	0,4620	5,0619	0,6852	5,1219	0,4388	5,1146	0,4434	+0,7681	+1,1392	0,64	0,65
30	3,6521	0,4052	4,6904	0,5931	5,0909	0,3663	5,0383	0,3713	+0,7865	+1,1511	0,62	0,63
35	3,6867	0,3607	4,6848	0,5236	5,0457	0,3184	4,9980	0,3231	+0,7939	+1,1523	0,61	0,62
40	3,6520	0,3260	4,5111	0,4679	4,9046	0,2882	4,8591	0,2914	+0,7877	+1,1305	0,62	0,62
45	3,7955	0,3315	4,6768	0,4460	4,9002	0,2605	4,8813	0,2622	+0,8118	+1,0921	0,58	0,59
50	3,7145	0,3016	4,5058	0,4099	4,8218	0,2379	4,7913	0,2401	+0,8143	+1,1068	0,58	0,59

H 4

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/H2/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT = 9.6889)
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4.0000

LAM=0.8 MY=1.0 M=100 N= 300 P= 50 ALPHA=0.1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,9160	0,0000	4.4401	0.0000								
2	2,5151	0,2835	5.8472	0.9950								
3	2,3555	0,2296	5.4025	0.7562	2,9673	0,6755	7,0470	0,8835	-0,4496	-1,4808	0,89	1,17
4	2,3138	0,1759	5.2471	0.5829	3,1198	0,5390	6,9333	0,6699	-0,3808	-1.2616	0,92	1,15
5	2,8146	0,4694	5.3035	0.4690	5.2905	0,4690	6,4889	0,6672	-0,0109	-0.0109	1,00	1,42
6	2,8716	0,3947	6.2592	0.9560	6,5762	0,9495	7,3876	0,9910	+0,1160	+0,2810	0,99	1,04
7	3,4922	0,6668	7.0921	1.1252	7,6349	0,8707	7,5999	0,8719	+0,6334	+1,0690	0,77	0,77
8	3,2759	0,6175	7.8120	1.1928	8.2442	1,1345	8,5361	1,1615	+0,3090	+0,5969	0,95	0,97
9	3,5003	0,5802	8.5012	1.2435	8,9594	1,1205	9,0009	1,1216	+0,4337	+0,9169	0,90	0,90
10	3,3460	0,5493	8.1415	1.1700	8.8068	1,0280	8,7955	1,0280	+0,4776	+1,0173	0,88	0,88
11	3,5423	0,5383	8.4069	1.0934	8.8914	0,9364	8,8646	0,9369	+0,5163	+1,0586	0,86	0,86
12	3,4551	0,4959	8.1690	1.0278	8.7716	0,8693	8,7139	0,8709	+0,5336	+1,1059	0,85	0,85
13	3,4985	0,4597	9.7270	1.7722	10.4253	1,6526	10.2284	1,6624	+0,3612	+1,3925	0,93	0,94
14	3,5663	0,4318	9.3758	1.6801	9,9145	1,5922	9,8095	1,5956	+0,3192	+1,2422	0,95	0,95
15	3,4610	0,4156	9.4444	1.5695	10.0529	1,4977	9,9835	1,4987	+0,2989	+1,1288	0,95	0,95
20	4,1313	0,5601	9.4454	1.2952	9.3389	1,2129	9,3141	1,2175	+0,3507	+0,8111	0,94	0,94
25	3,9473	0,4620	9.8120	1.1369	9,8489	1,0899	9,8647	1,0987	+0,2844	+0,7000	0,96	0,97
30	3,6521	0,4052	9.1769	1.0163	9,4664	0,9523	9,5247	0,9547	+0,3339	+0,8323	0,94	0,95
35	3,6867	0,3607	8.8157	0.9039	9,0521	0,8625	9,1290	0,8665	+0,3011	+0,7545	0,95	0,96
40	3,6520	0,3250	8.7166	0.8690	9,0343	0,8164	9,0647	0,8169	+0,3425	+0,9129	0,94	0,94
45	3,7955	0,3315	8.4256	0.7901	8,5489	0,7643	8,6301	0,7755	+0,2532	+0,6034	0,97	0,98
50	3,7145	0,3016	8.3145	0.7561	8,4982	0,7039	8,6006	0,7120	+0,2657	+0,6434	0,96	0,98

M 4

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/H2/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT = 9,6889).
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4,0000

LAM=0,8 MY=1,0 M=200 N= 400 P= 50 ALPHA=0,1

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,4113	0,0000	3,8311	0,0000								
2	2,4359	0,0174	5,3466	1,0716								
3	4,3308	1,5473	7,6169	1,9866	7,2194	0,7005	7,2860	0,7667	+0,9358	+1,2012	0,35	0,39
4	3,6702	1,2938	7,0355	1,5727	7,4110	0,5507	7,3653	0,5791	+0,9367	+1,1386	0,35	0,37
5	4,0959	1,1029	12,2993	4,8733	12,0618	4,0358	12,2034	4,3521	+0,5605	+2,4767	0,83	0,89
6	4,7659	1,1040	13,9953	4,3462	12,0856	3,3633	13,2295	3,7457	+0,6334	+2,4935	0,77	0,86
7	4,7048	0,9479	12,3623	4,0204	10,5442	3,1911	11,6576	3,5250	+0,6083	+2,5798	0,79	0,88
8	4,3994	0,8773	11,4925	3,6107	10,4508	2,7931	11,0931	3,1293	+0,6337	+2,6083	0,77	0,87
9	4,1888	0,8047	10,3739	3,3783	9,8504	2,5367	10,1852	2,9103	+0,6605	+2,7729	0,75	0,86
10	3,9810	0,7505	9,5840	3,1315	9,6378	2,2914	9,6029	2,6769	+0,6816	+2,8439	0,73	0,85
11	3,7817	0,7083	9,1870	2,8719	9,7945	2,0889	9,4054	2,4408	+0,6862	+2,7824	0,73	0,85
12	4,0917	0,7139	9,4162	2,6417	9,1934	1,9927	9,3245	2,2388	+0,6565	+2,4292	0,75	0,85
13	4,0766	0,6592	8,9761	2,4749	8,7890	1,8798	8,8995	2,1065	+0,6504	+2,4421	0,76	0,85
14	4,0474	0,6127	8,5837	2,3290	8,4667	1,7727	8,5363	1,9871	+0,6486	+2,4653	0,76	0,85
15	4,1700	0,5840	9,4818	2,3405	9,0288	1,7480	9,3118	2,0003	+0,6650	+2,6651	0,75	0,85
20	3,8737	0,4610	9,8887	1,8319	10,2057	1,4200	10,0149	1,5816	+0,6318	+2,5107	0,78	0,86
25	3,9975	0,3868	10,7715	1,5934	10,7784	1,1938	10,7741	1,3682	+0,6623	+2,7285	0,75	0,85
30	4,1124	0,3359	10,5324	1,3982	10,2319	1,0718	10,4199	1,2102	+0,6422	+2,6727	0,77	0,87
35	4,1336	0,2957	9,7157	1,2505	9,3894	1,0209	9,5821	1,1064	+0,5775	+2,4419	0,82	0,88
40	4,0033	0,2869	9,0733	1,1322	9,0658	0,9263	9,0700	0,9953	+0,5751	+2,2699	0,82	0,88
45	3,9330	0,2661	8,7466	1,0311	8,8977	0,8385	8,8136	0,9026	+0,5820	+2,2556	0,81	0,88
50	4,0608	0,3151	9,4610	1,0175	9,3423	0,8105	9,4002	0,8642	+0,6046	+1,9522	0,80	0,85

H 4

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/H2/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT =10,5429),
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 9,0000

LAM=0.9 MY=1.0 M=100 N= 300 P= 50 ALPHA=0.3

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	5,0759	0,0000	6,6250	0,0000								
2	4,8299	0,1739	5,3580	0,8959								
3	4,1800	0,5432	4,8686	0,7186	9,4641	0,4982	9,6886	0,4988	+0,7207	+0,9534	0,69	0,69
4	11,2485	6,1350	9,4301	3,9869	7,9760	0,3941	7,1816	2,2031	+0,9951	+0,6467	0,10	0,55
5	10,7954	4,9247	10,4347	3,3137	9,3084	1,1989	8,6393	2,1923	+0,9323	+0,6273	0,36	0,66
6	9,6406	4,2372	9,4201	2,9126	9,0083	1,0315	8,7795	1,8314	+0,9352	+0,6428	0,35	0,63
7	9,1685	3,6581	8,9877	2,5284	8,8788	0,8920	8,8192	1,5702	+0,9357	+0,6467	0,35	0,62
8	9,0391	3,2031	9,2146	2,2225	9,1895	0,8328	9,1756	1,4138	+0,9271	+0,6433	0,37	0,64
9	9,0358	2,8472	9,3810	1,9818	9,3580	0,7571	9,3452	1,2668	+0,9242	+0,6433	0,38	0,64
10	8,5937	2,5966	8,9642	1,8269	9,2287	0,6926	9,3705	1,1404	+0,9254	+0,6511	0,38	0,62
11	9,5306	2,5239	10,0867	1,9759	9,7050	0,7781	9,5562	1,0518	+0,9192	+0,7196	0,39	0,53
12	10,2557	2,4155	10,7985	1,9552	9,8677	0,7342	9,5428	0,9642	+0,9252	+0,7412	0,38	0,50
13	9,7452	2,2830	10,2714	1,8567	9,7091	0,6919	9,5262	0,8902	+0,9280	+0,7547	0,37	0,48
14	9,4023	2,1455	9,8696	1,7670	9,5620	0,6568	9,4673	0,8285	+0,9284	+0,7646	0,37	0,47
15	9,9374	2,0681	11,1955	2,0882	10,3785	1,0542	10,2581	1,0871	+0,8632	+0,8716	0,50	0,52
20	12,9518	2,2921	13,8697	2,5016	9,9260	1,0129	9,9179	1,0129	+0,9144	+0,9980	0,40	0,40
25	11,2509	1,9578	12,1842	2,1260	9,9329	0,8271	9,9332	0,8271	+0,9212	+1,0004	0,39	0,39
30	11,0724	1,7375	12,3620	1,9351	10,2243	0,7300	10,2896	0,7320	+0,9261	+1,0315	0,38	0,38
35	10,3700	1,5219	11,6070	1,6939	10,1911	0,6290	10,2370	0,6310	+0,9285	+1,0335	0,37	0,37
40	10,3632	1,3696	11,4737	1,5208	10,0717	0,5734	10,1105	0,5747	+0,9262	+1,0284	0,38	0,38
45	10,5200	1,2891	11,6246	1,4086	10,0828	0,5237	10,1046	0,5240	+0,9283	+1,0144	0,37	0,37
50	10,4801	1,1904	11,6962	1,2968	10,1956	0,4743	10,2162	0,4746	+0,9307	+1,0139	0,37	0,37

H 5

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES SYSTEMS M/G/1 GESCHAETZT.
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 1,5000

LAM=0,6 MY=1,0 M= 50 N= 250 P= 50

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	B)DIFF-METH STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	2,0820	0,0000	1.7628	0,0000								
2	1,5383	0,3844	1.3682	0,2790								
3	1,5264	0,2565	1.3387	0,1876	1,3196	0,0170	1,3124	0,0717	+0,9959	+0,7283	0,09	0,38
4	1,6780	0,2329	1.3593	0,1418	1,2632	0,0655	1,1813	0,1256	+0,8868	+0,5399	0,46	0,89
5	1,5784	0,2065	1.2915	0,1286	1,2471	0,0536	1,2131	0,1044	+0,9089	+0,5660	0,42	0,81
6	1,5135	0,1820	1.2638	0,1101	1,2564	0,0454	1,2503	0,0934	+0,9112	+0,5513	0,41	0,85
7	1,5658	0,1634	1.2893	0,0973	1,2533	0,0390	1,2234	0,0839	+0,9161	+0,5456	0,40	0,86
8	1,4834	0,1624	1.2288	0,1022	1,2385	0,0364	1,2454	0,0762	+0,9343	+0,5879	0,36	0,75
9	1,5758	0,1686	1.2836	0,1045	1,2389	0,0324	1,2078	0,0764	+0,9508	+0,5893	0,31	0,73
10	1,5601	0,1525	1.2744	0,0945	1,2390	0,0291	1,2143	0,0691	+0,9512	+0,5893	0,31	0,73
11	1,5408	0,1398	1.2638	0,0865	1,2398	0,0265	1,2230	0,0633	+0,9518	+0,5886	0,31	0,73
12	1,5117	0,1312	1.2514	0,0801	1,2447	0,0247	1,2398	0,0602	+0,9513	+0,5812	0,31	0,75
13	1,5144	0,1211	1.2584	0,0743	1,2500	0,0234	1,2440	0,0557	+0,9492	+0,5821	0,31	0,75
14	1,5146	0,1125	1.2617	0,0690	1,2532	0,0219	1,2471	0,0519	+0,9482	+0,5822	0,32	0,75
15	1,5051	0,1054	1.2557	0,0647	1,2527	0,0205	1,2506	0,0485	+0,9487	+0,5825	0,32	0,75
20	1,4959	0,0895	1.2562	0,0563	1,2586	0,0166	1,2603	0,0394	+0,9556	+0,6005	0,29	0,70
25	1,5829	0,0830	1.3247	0,0541	1,2719	0,0182	1,2418	0,0343	+0,9419	+0,6367	0,34	0,63
30	1,5334	0,0732	1.2958	0,0506	1,2740	0,0163	1,2625	0,0301	+0,9469	+0,6544	0,32	0,59
35	1,5418	0,0647	1.3061	0,0441	1,2792	0,0147	1,2643	0,0273	+0,9433	+0,6441	0,33	0,62
40	1,5446	0,0683	1.3053	0,0470	1,2759	0,0133	1,2607	0,0268	+0,9591	+0,6596	0,28	0,57
45	1,5733	0,0632	1.3218	0,0435	1,2735	0,0125	1,2485	0,0249	+0,9581	+0,6590	0,29	0,57
50	1,5551	0,0592	1.3128	0,0407	1,2766	0,0118	1,2578	0,0234	+0,9573	+0,6583	0,29	0,57

H 5

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES SYSTEMS M/G/1 GESCHAETZT
THEOR. WERT DES HILFSMODELLS M/M/1 = 4.0000

LAM=0.8 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50

K	HILFSMODELL MITTELW	HILFSMODELL STANDAB	HAUPTMODELL MITTELW	HAUPTMODELL STANDAB	A)REG-METH MITTELW	A)REG-METH STANDAB	B)DIFF-METH. MITTELW	B)DIFF-METH. STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	REDUKTION B
1	4,7933	0,0000	4,0605	0.0000								
2	3,3907	0,9918	2.9712	0.7703								
3	3,5467	0,6733	2.9926	0.5138	3,3343	0.0799	3,4459	0.1840	+0.9878	+0.7538	0.16	0,36
4	4,0745	0,6814	3.1341	0.4044	3,0940	0.1753	3,0591	0.3623	+0.9011	+0.5347	0.43	0,90
5	3,8948	0,5684	2.9499	0.3030	3,0103	0.1592	3,0551	0.2899	+0.8987	+0.5739	0.44	0,80
6	3,7088	0,5032	2.9309	0.3030	3,0824	0.1526	3,2222	0.2857	+0.8638	+0.5202	0.50	0,94
7	3,7150	0,4314	2.9347	0.2598	3,0830	0.1308	3,2197	0.2449	+0.8639	+0.5202	0.50	0,94
8	3,4488	0,4522	2.7334	0.2952	3,0596	0.1246	3,2845	0.2227	+0.9066	+0.5918	0.42	0,75
9	3,7199	0,4763	2.9341	0.3235	3,1118	0.1153	3,2142	0.2088	+0.9344	+0.6346	0.36	0,65
10	3,8131	0,4377	2.9959	0.2970	3,1147	0.1038	3,1828	0.1902	+0.9370	+0.6358	0.35	0,64
11	3,7390	0,4041	2.9587	0.2723	3.1236	0.0948	3.2198	0.1765	+0.9374	+0.6316	0.35	0,65
12	3,6372	0,3831	2.9036	0.2551	3.1306	0.0873	3,2664	0.1678	+0.9396	+0.6258	0.34	0,66
13	3,7619	0,3734	3.0230	0.2620	3,1801	0.0889	3,2611	0.1550	+0.9406	+0.6600	0.34	0,59
14	3,7865	0,3475	3.0438	0.2441	3,1848	0.0827	3,2573	0.1440	+0.9408	+0.6608	0.34	0,59
15	3,7688	0,3248	3.0208	0.2289	3,1740	0.0779	3.2520	0.1345	+0.9402	+0.6626	0.34	0,59
20	3.7225	0,3031	3.0472	0.2300	3,2470	0.0724	3,3247	0.1115	+0.9491	+0.7202	0.31	0,48
25	4.1982	0.4444	3.4231	0.3699	3,2612	0.0713	3.2248	0.1083	+0.9812	+0.8167	0.19	0,29
30	4.0060	0.3888	3.2753	0.3186	3.2705	0.0627	3.2693	0.0989	+0.9804	+0.8033	0.20	0,31
35	3.9630	0.3371	3.2666	0.2764	3.2963	0.0551	3.3036	0.0862	+0.9799	+0.8034	0.20	0,31
40	3.9754	0.3158	3.3087	0.2591	3.3282	0.0657	3.3333	0.0926	+0.9673	+0.7934	0.25	0,36
45	3.9030	0.2867	3.2345	0.2349	3.3114	0.0592	3.3314	0.0838	+0.9678	+0.7931	0.25	0,36
50	3.9097	0.2665	3.2535	0.2192	3.3252	0.0573	3.3438	0.0794	+0.9653	+0.7938	0.26	0,36

H 6

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE DES WARTESYSTEMS M/M/1 GESCHAETZT (THEOR. WERT= 4.0000),
ALS KORRELIERTE HILFSVARIABLE DIENT DIE MITTLERE ABFERTIGUNGSZEIT (THEOR. WERT = 1/MY).

LAM=0.8 MY=1.0 M= 0 N= 200 P= 50

K	POISSON-MODELL MITTELW	STANDAB	MITTL.ABF.-ZEIT MITTELW	STANDAB	A)REG-METH MITTELW	STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	B
1	4,1494	0,0000	1.0966	0,0000								
2	3,0207	0,7981	1.0161	0,0570								
3	3,2290	0,5586	1.0100	0,0383	3,0976	0,2377	3,2191	0,5242	+0,9049	+13,1959	0,43	0,94
4	3,3796	0,4388	1.0084	0,0288	3,2702	0,2315	3,3711	0,4146	+0,8495	+12,9607	0,53	0,94
5	3,6960	0,4509	1.0055	0,0234	3,2593	0,1864	3,6604	0,4207	+0,9105	+12,2836	0,41	0,93
6	3,6272	0,3809	1.0027	0,0280	3,2220	0,1583	3,5945	0,3557	+0,9096	+12,3861	0,42	0,93
7	3,5998	0,3275	1.0199	0,0267	3,3935	0,1739	3,5800	0,3052	+0,8475	+10,3796	0,53	0,93
8	3,5744	0,2876	1.0169	0,0236	3,3996	0,1522	3,5575	0,2679	+0,8484	+10,3526	0,53	0,93
9	3,7764	0,3188	1.0183	0,0210	3,5764	0,2218	3,7581	0,3041	+0,7182	+10,9058	0,70	0,95
10	3,6224	0,3220	1.0214	0,0191	3,4192	0,2660	3,6010	0,3116	+0,5636	+9,4928	0,83	0,97
11	3,7677	0,3238	1.0238	0,0175	3,5211	0,2681	3,7439	0,3143	+0,5607	+10,3603	0,83	0,97
12	3,6714	0,3108	1.0256	0,0162	3,4249	0,2691	3,6458	0,3031	+0,5004	+9,6249	0,87	0,98
13	3,7026	0,2835	1.0327	0,0164	3,4174	0,2505	3,6699	0,2807	+0,4957	+8,7146	0,87	0,97
14	3,8791	0,3173	1.0342	0,0153	3,5480	0,2806	3,8449	0,3105	+0,4667	+9,6771	0,88	0,98
15	3,7953	0,3070	1.0273	0,0158	3,5189	0,2623	3,7680	0,2991	+0,5194	+10,1185	0,85	0,97
20	3,7660	0,2498	1.0256	0,0133	3,5794	0,2303	3,7404	0,2450	+0,3873	+7,2915	0,92	0,98
25	3,7111	0,3087	1.0083	0,0150	3,6238	0,2653	3,7028	0,3014	+0,5114	+10,5500	0,86	0,98
30	4,0012	0,3349	1.0052	0,0130	3,9510	0,3100	3,9960	0,3302	+0,3783	+9,7317	0,93	0,99
35	3,8890	0,3007	1.0061	0,0118	3,8320	0,2797	3,8829	0,2966	+0,3677	+9,3875	0,93	0,99
40	3,8773	0,2806	1.0028	0,0106	3,8503	0,2615	3,8745	0,2769	+0,3630	+9,5761	0,93	0,99
45	3,8491	0,2687	0.9982	0,0100	3,8661	0,2514	3,8509	0,2654	+0,3537	+9,5158	0,94	0,99
50	4.0008	0,2766	1.0008	0,0094	3,9929	0,2599	4,0000	0,2735	+0,3421	+10,0820	0,94	0,99

H 7

ES WIRD DIE MITTLERE WARTESCHLANGENLAENGE EINES ERLANG-PROZESSES MIT FR FREIHEITSGRADEN GESCHAETZT (THEOR. WERT= 3.2000),
ALS KORRELIERTE HILFSVARIABLE DIENT DIE MITTLERE ABFERTIGUNGSZEIT (THEOR. WERT = 1/MY).

LAM=0.8 MY=1.0 M= 50 N= 250 P= 50 FR= 2

K	ERLANG-MODELL MITTELW	STANDAB	MITTL.ABF.-ZEIT MITTELW	STANDAB	A)REG-METH MITTELW	STANDAB	B)DIFF-METH MITTELW	STANDAB	KOR-KOEF	REG-KOEF	REDUKTION A	B
1	4,2974	0,0000	1.0584	0.0000								
2	3,1005	0,8464	1.0008	0.0407								
3	3,1116	0,5643	1.0019	0.0272	3,0728	0,0095	3,1097	0,5371	+0.9999	+20.7640	0,02	0,95
4	3,2611	0,4426	1.0193	0.0254	2,9437	0,1479	3,2418	0,4188	+0.9425	+16.4499	0,33	0,95
5	3,0845	0,3877	1.0241	0.0207	2,7432	0,2531	3,0604	0,3723	+0.7575	+14.1617	0,65	0,96
6	3,0001	0,3322	1.0066	0.0235	2,9349	0,2377	2,9935	0,3162	+0.6986	+9,8627	0,72	0,95
7	3,0115	0,2849	1.0140	0.0213	2,8857	0,2106	2,9977	0,2710	+0.6734	+9,0136	0,74	0,95
8	2,8031	0,3165	1.0166	0.0188	2,6785	0,2832	2,7866	0,3086	+0.4468	+7,5294	0,89	0,97
9	2,9799	0,3270	1.0152	0.0167	2,8773	0,3069	2,9647	0,3216	+0.3452	+6,7441	0,94	0,98
10	3,0217	0,2970	1.0186	0.0154	2,8919	0,2768	3,0032	0,2917	+0.3624	+6,9884	0,93	0,98
11	2,9856	0,2722	1.0246	0.0151	2,8596	0,2609	2,9611	0,2682	+0.2849	+5,1267	0,96	0,99
12	2,9186	0,2576	1.0189	0.0149	2,8051	0,2415	2,8998	0,2528	+0.3480	+6,0163	0,94	0,98
13	3,0179	0,2562	1.0187	0.0138	2,9075	0,2429	2,9992	0,2522	+0.3177	+5,9160	0,95	0,98
14	3,0429	0,2391	1.0221	0.0132	2,9102	0,2256	3,0208	0,2351	+0.3312	+6,0004	0,94	0,98
15	3,0233	0,2240	1.0233	0.0124	2,8879	0,2122	3,0000	0,2203	+0.3205	+5,8007	0,95	0,98
20	3,0332	0,2222	1.0045	0.0124	3,0147	0,2162	3,0287	0,2197	+0.2306	+4,1255	0,97	0,99
25	3,4393	0,3680	1.0050	0.0104	3,4256	0,3669	3,4343	0,3674	+0.0777	+2,7473	1,00	1,00
30	3,2881	0,3166	1.0043	0.0090	3,2759	0,3156	3,2838	0,3160	+0.0809	+2,8338	1,00	1,00
35	3,2737	0,2749	1.0032	0.0079	3,2658	0,2743	3,2705	0,2745	+0.0698	+2,4360	1,00	1,00
40	3,2970	0,2548	1.0029	0.0076	3,2832	0,2522	3,2941	0,2538	+0.1426	+4,7780	0,99	1,00
45	3,2316	0,2313	1.0022	0.0069	3,2217	0,2292	3,2294	0,2305	+0.1331	+4,4396	0,99	1,00
50	3,2391	0,2148	1.0017	0.0063	3,2300	0,2124	3,2375	0,2140	+0.1503	+5,1466	0,99	1,00

LITERATURVERZEICHNIS

Bauknecht K. u. Nef W. (1971): Digitale Simulation. Berlin-Heidelberg-New York 1971.

Bhat U.N. (1972): Two measures for describing queue behavior. Operations Research 2o (1972),357-372.

Cochran W.G. (1972): Stichprobenverfahren. Berlin-New York 1972.

Conway R.W. (1964): Some tactical problem in digital simulation. Management Science 1o (1964),47-61.

Ehrenfeld S. u. Ben Turia (1962): The efficiency of statistical sumulation procedure. Technometrics, 4 (1962),257-275.

Ferschl F. (1964): Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Wien-Würzburg 1964.

Fishman G.S. (1972): Bias considerations in simulation experiments. Operations Research 2o (1972),785-79o.

Gafarian A.V. u. Amcker C.J. (1966): Mean value estimation from digital computer simulation. Operations Research 14 (1966),25-44.

Gebhardt D. (1974 a): Konfidenzintervalle bei der Warteschlangen-Simulation. Angewandte Informatik 16 (1974).

Gebhardt D. (1974 b): Die Auswertung von autokorrelierten Simulationsergebnissen. Erscheint in Unternehmensforschung.

Goldberg S. (1968): Differenzengleichungen und ihre Anwendung in Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie. München-Wien 1968.

Gridgeman N.T. (196o): Geometric probability and the number π. Scripta Math. 25 (196o),183-195.

Hammersley I.M. u. Handscomb D.C. (1964): Monte Carlo Methods. London-New York 1964.

Jackson J.R. (1961): Some expected transition times in simple queues. Operations Research 9 (1961),277-279.

Jöhnk M.D. (1969): Erzeugen und Testen von Zufallszahlen. Würzburg-Wien 1969.

Kahn H. u. Marshall (1953): Methods of Reducing Sample Size in Monte Carlo Computations. Operations Research 1 (1953), 263-278.

Kaufmann A. u. Cruon R. (1961): Les phênomênes d'attente. Paris 1961.

Kendall D.G. (1953): Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chains. Annals of Mathematical Statistics 24 (1953),339-354.

Köcher D., Matt G., Oertel C. u. Schneeweiß H. (1972): Einführung in die Simulationstechnik. Frankfurt 1972.

Kohlas J. (1972): Monte Carlo Simulation im Operations Research. Berlin-Heidelberg-New York 1972.

Koxholt R. (1967): Die Simulation - Ein Hilfsmittel der Unternehmensforschung. München-Wien 1967.

Maxwell W.L. (1965): Variance Reduction Techniques. Santa Monica 1965.

Meyer H. (Hrsg.) (1956): Symposion on Monte Carlo Methods. New York-London 1956.

Mihram G.A. (1972): Simulation: Statistical Foundations and Methodology. New York-London 1972.

Mize I.H. u. Cox J.G. (1968): Essentials of Simulation. Englewood Cliffs (N.J.) 1968.

Morse P.M. (1958): Queues, Inventories and Maintenance. New York-London 1958.

Naylor T.H., Balintfy I.L., Burdick D.S. u. Kong Chu (1966): Computer Simulation Techniques. New York-London-Sidney 1966.

Pearson E.S. u. Hartley H.O. (1966): Biometrika tables for statisticians. Vol. I. Cambridge 1966.

Saaty T.L. (1961): Elements of queuing theory New York-Toronto-London 1961.

Schneeweiß H. (196o): Zur Theorie der Warteschlangen. Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung 12 (196o),471-5o7.

Schneeweiß H. (1971): Ökonometrie. Würzburg-Wien 1971.

Stange K. (1964): Die Anlauflösung für den einfachen exponentiellen Bedienungskanal (mit beliebig vielen Warteplätzen), der für t=o leer ist. Unternehmensforschung 8 (1964),1-24.

Stenger H (1971): Stichprobentheorie. Würzburg-Wien 1971.

Tocher K.D. (1963): The Art of Simulation. London 1963.

Druck: Rotaprint - Offset - Druckerei Klein 6602 Dudweiler.